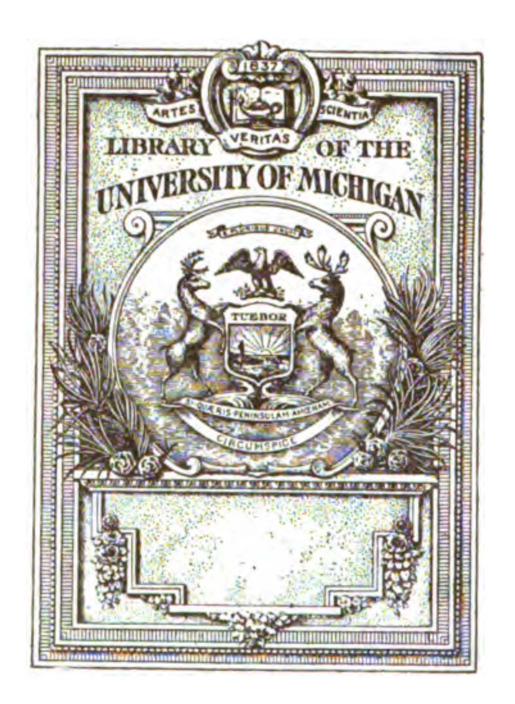
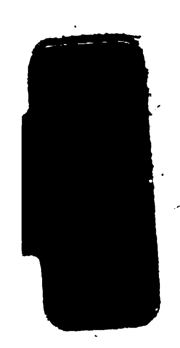
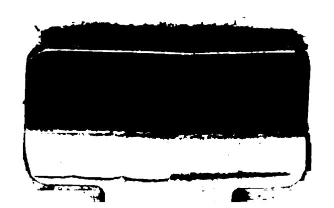


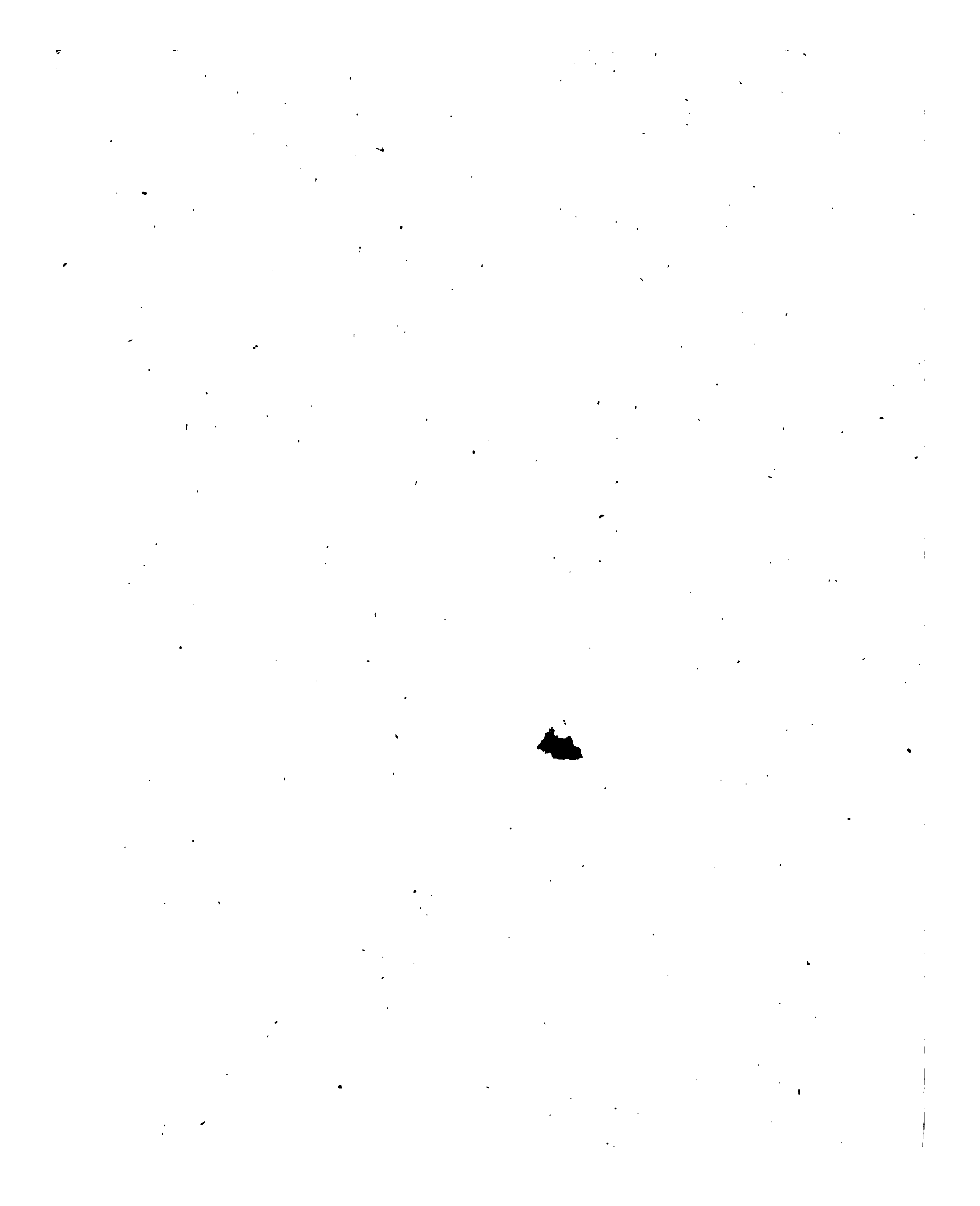





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE







Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel.

Neue,
durchgehends umgearbeitete
und
mit einer historischen Einleitung
vermehrte Auflage,
von

Johann Ephraim Scheibel,
Prof. der Mathematik und Physik bey beyden Gymnasiis in Breslau.

Mit acht Kupfertafeln.



Breslau 1781.
Bey Johann Friedrich Korn dem Aeltern, im Buchladen neben dem Königl. Ober-Zoll- und Accis-Amt.

Dem

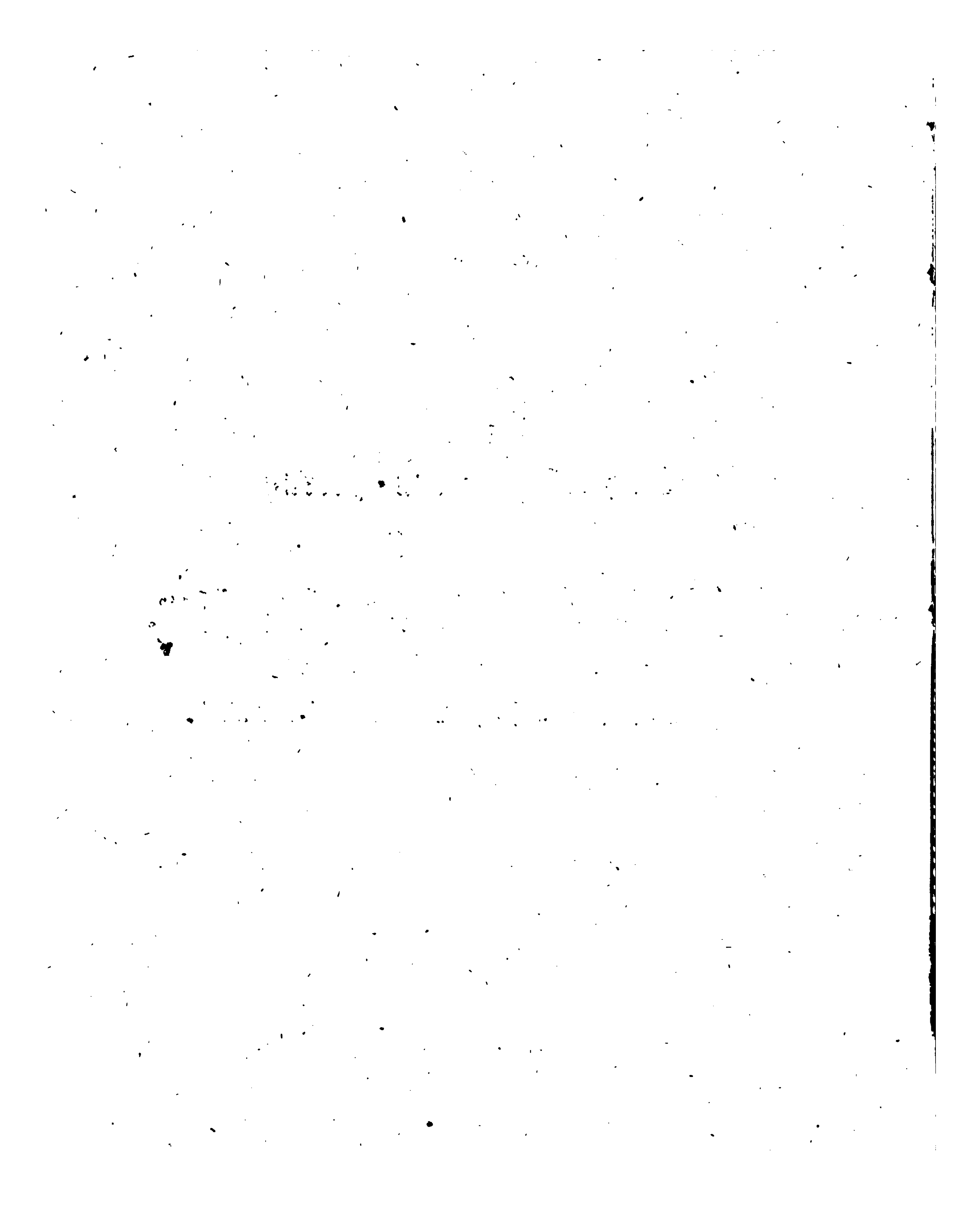
Hochwohlgebornen-Herrn,

Herrn

Gottlieb Willhelm von Breßler,

Erbherrn zu Lauske, Nostitz, Maltitz ꝛc.

Sr. Churfürstl. Durchl. zu Sachsen Geheimden Rath.



Ew. Wohlgebornen

Habe ich mich für verbunden geachtet, gegenwärtige Ausarbeitung mit aller derjenigen Devotion zu überreichen, die ich dem einzigen Erben des Ruhms der Breßlerischen Verdienste um Breslau und um mich selbst schuldig bin. Nur dem Wohlwollen meiner Gnädigen und Hochgebietenden Beförderer, welches Dero Seliger Herr Vater durch völlige Beystimmung und unerwartete besonderste Empfehlung unterstützte, also keinen mächtigen Anverwandten, die irgend jemand verdrängt hätten, habe ich es vorzüglich zu verdanken, daß ich vor zwanzig Jahren zum Strelitzischen Lehramt in der Mathematik in einem weit jüngern Alter berufen worden, als es ehedem bey uns üblich war. Es war auch bald nachher mit Dessen ernstlichen Ermahnung, es an nichts fehlen zu lassen, um mich einer solchen Beförderung würdig zu verhalten, Sein für mich ehrenvollster Auftrag verbunden, mich in Ew. Hochwohlgebornen Gegenwart, neben dem öffentlichen Unterricht, im Vortrage der ersten Gründe der reinen Mathematik zu üben; an welche Stunden ich stets voll Vergnügens zurückdenke.

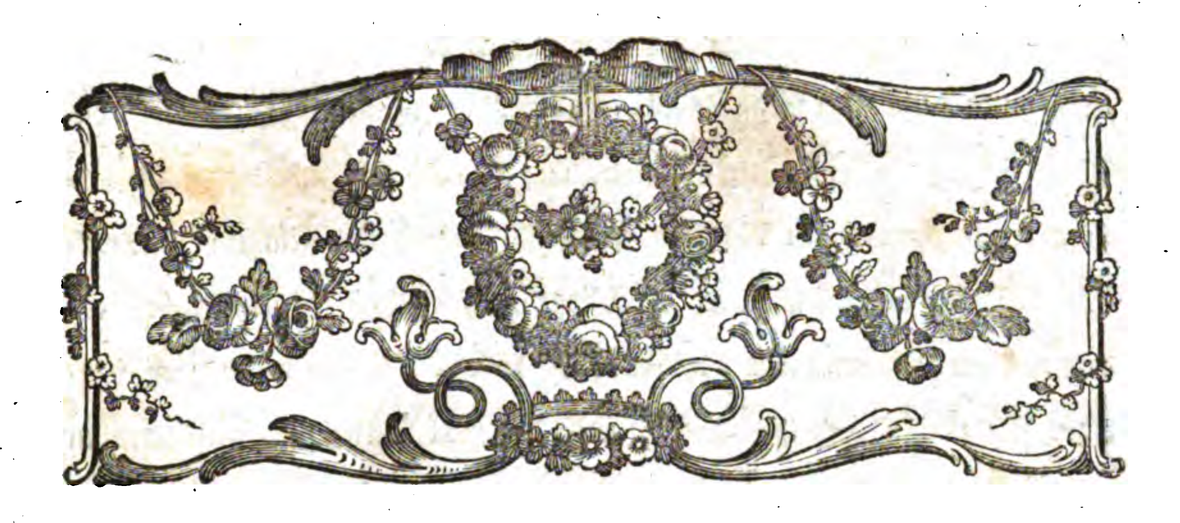
Sollte also diese Schrift, dergleichen Ihm selbst ehrfurchtsvoll zu überreichen, es mir bey Seinem Leben gänzlich an Gelegenheit gefehlt hat, Ew. Wohlgebornen, bey nachher auf hohen Schulen erlangten tiefern Einsichten in der Mathematik, nicht gänzlich gefallen: so kann ich doch hoffen, daß sie mit Nachsicht als eine Probe meines möglichsten Eifers werde aufgenommen werden, welchen das stete Andenken an alle mir von Dero Seligem Herrn Vater gegönnte Beförderung, Unterstützung und Aufmunterung in allen Vorfällen, so wie an jene Erinnerung, von mir täglich fordert.

Mit diesem öffentlichen Geständnis meines dankbarsten Herzens, verbinde ich die brünstigste Wünsche für die ununterbrochne Wohlfahrt, Erhaltung, und Ausbreitung des Hochadelichen Breßlerischen Geschlechts, und verharre mit vollkommenster Devotion

Ew. Hochwohlgebornen

Breslau,
den 21. April 1781.

gehorsamster und verpflichtester Diener
Johann Ephraim Scheibel.



Vorbericht.

Ich kann es nicht läugnen, daß ich mich, aus eignem Antriebe, niemals würde entschlossen haben, meine eingeschränkte Musse auf die Besorgung einer neuen Auflage des Scheffeltschen oder irgend eines andern Tractats vom Proportionalzirkel zu verwenden. Wenn ich beym Unterricht in der Geometrie dieses Werkzeuges beyläufige Meldung thun muß: so sehe ich mich genöthigt, allemal dabey aus Ueberzeugung zu erinnern, daß, so sinnreich es auch eingerichtet ist, es dennoch nicht unentbehrlich sey. Denn ob es gleich mit dessen Einrichtung und Anwendung seine völlige theoretische Richtigkeit hat: so ist ihm, bey Auflösung aller dahin gehörigen, oder dazu von vielen Schriftstellern gezogenen Aufgaben, das Rechnen, und der Gebrauch

eines

eines guten verjüngten Maaßstabes, allerdings vorzuziehen. Indessen ist dieses Werkzeug in sehr vielen Händen, und befindet sich gemeiniglich in vollständigen mathematischen Bestecken, sonderlich auswärtiger Künstler; aus welchen Ursachen es noch nicht an Nachfrage nach Scheffelts Unterricht, als dem einzigen bekannten und umständlichen, fehlet. Da nun dessen zwey Auflagen sich gänzlich vergriffen haben: so ist der Herr Verleger dadurch bewogen worden eine neue Auflage zu veranstalten; zu deren Besorgung er mich freundschaftlich aufgefordert, ihre Einrichtung aber völlig meiner Willkühr überlassen hat. Es stehet also dahin, ob ich sie so erträglich werde getroffen haben, daß nicht vielmehr ein wörtlicher Abdruck der zweyten Auflage ihr würde vorzuziehen gewesen seyn; wenigstens würde sich dieser schon durch seine äußerliche Güte, für welche der Herr Verleger eben so rühmlichst, wie bey dieser, gesorgt haben würde, dem Liebhaber empfohlen haben. In dieser habe ich die in Scheffelts Unterricht vorkommende Materialien durchgehends beybehalten, um ihr mit desto größerem Rechte den Namen ihres ersten ehrlichen und fleißigen Urhebers vorsetzen zu können; wobey es aber kaum fehlen konnte, daß nicht bey der Bearbeitung vieles vorgekommen wäre, welches, nach meiner geringen Einsicht, umgeändert, mitgenommen, weggelassen, und erinnert zu werden verdient hätte. Ich kannte meinen Hauptendzweck, solche Besitzer, auch Verfertiger dieses Werkzeuges, und solche Leser dieser Schrift, welche nur Elementarkenntnisse haben, in den Stand zu setzen, dessen Einrichtung und

Gebrauch,

Gebrauch, ohne mündlichen Unterricht, welcher hier ohnediß ganz wegfällt, kennen zu lernen; womit aber ein Nebenendzweck zu verbinden war, nämlich solchen Lesern Gelegenheit zu geben, sich mit den arithmetischen, auch hier und da algebraischen Auflösungen der Aufgaben, ohne den Gebrauch dieses Werkzeuges, bekannter zu machen. Hierbey sind mir die vornehmsten Schriften vom Proportionalzirkel, sonderlich meines Landsmanns, Niclas Goldmanns, ziemlich seltner Tractat, sehr zu statten gekommen; von welchen ich nur eine Bibliographie entwerfen wollte, die aber, wider meine Erwartung, zu einer vielleicht zu weitläufigen historischen Einleitung angewachsen ist. Die Kupfertafeln habe ich durchgehends nach dem Proportionalzirkel und Maaßstabe neu gezeichnet, und, hoffentlich ohne Nachtheil der Deutlichkeit, alles auf vier Tafeln weniger gebracht, als die vorige Auflage hat; auch bey keinem Exempel es beym bloßen Abschreiben daraus bewenden lassen, welches noch weniger bey den Tabellen für die Eintheilung geschehen durfte. Indessen werde ich mir selbst niemals schmeicheln, alles untadelhaft bearbeitet zu haben; jedermann kann auch diese Schrift zu einem litterarischen Producte machen, zu welchem es ihm gefällig ist; da es von dem Besten, wie von dem Schlechtesten, schon vermöge des Grundsatzes des Widerspruches richtig ist, daß es seyn und nicht seyn kann: wenn nur nicht die Erlernung einer nicht geringen Menge mathematischer Elementarkenntnisse, gesetzt auch, durch diese Ausarbeitung nicht viel gewinnen könnte, doch nicht gar zu viel verlieren



dürfte. Ich wage es wenigstens, das Studium des Inhalts dieses Unterrichts, als einen nützlichen Zeitvertreib, zu empfehlen. Denn daß der Werth der Mathematik, wenn man sie bloß als einen Zeitvertreib betrachtet, groß, und ich setze hinzu, von unerkannter überwiegenden Wichtigkeit für Verstand und Herze sey: davon mag ein jeder, der sich auf eigene Erfahrung nicht berufen kann, sich aus den Schriften eines Deutschen Gelehrten belehren, dessen Verdienste um Mathematik, Philosophie, und Geschmack gleich groß sind.



Inhalt.

Inhalt.



Historische



Historische Einleitung.

I. Hulsii Beschreibung von Burgis Proportionalzirkel 1604.

(*) **D**ritter Tractat der Mechanischen Instrumenten LEVINI HULSII. **Beschreibung vnd Vnterricht deß Jobst Burgi Proportional Circkels**, dardurch mit sonderlichem vorthail ein jegliche Rechte oder Circkel lini, alle fläche, landcarte, augenscheinen, Vestungen, Gebew, ein Kugel mit den fünff regularibus, auch alle irregularia corpora, &c. bequemlich können zerthailt, zerschnitten, verwandelt, vergrößert vnd verjüngert werden. **Niemals zuvorn in Truck geben.** Franckfurt. Mit Röm. Kay. May. Freyheit. In Verlegung Leuini Hulsij. M. DCIIII. In Quart. 29 Seiten, 15 Kupf. taf.

Nach **Leupolds** alphabetischem Verzeichnis der Schriftsteller von Proportionswerkzeugen im Theatro Machinar. Arithm. Geom. p. 121, soll diese Beschreibung schon 1595 herausgekommen seyn; welches aber nicht seyn kann, weil sie in Hulsii nützlichem Verzeichniß von vielen Schriften, die er gebraucht hat, im ersten Tractat S. 6-11, wo es doch der Ort war, gar nicht vorkommt; vielmehr nicht allein die ausdrückliche Anzeige auf vorstehendem Titel, sondern auch die besondere Nachricht in gedachtem Verzeichnis auf das J. 1603, wo es heißt: **Jobst Burgi macht jezt die Beschreibung eines herrlichen newen Instruments, in Form eines Circkels, so zu der Geometria gehöret**, dagegen streitet. Vom Leben und mathematischen Erfindungen dieses **Burgi** oder JUSTI BYRGII, eines Schweizers, geb. 1552, welcher seit 1560 bey dem um die Astronomie höchstverdienten Landgraf von Hessen-Cassel, **Wilhelm IV.**, Hofuhrmacher, Mechanikus und Gehülfe, nachher aber ohngefähr seit 1604 bey

den Kaysern Matthias und Ferdinand II. Kammeruhrmacher gewesen, und 1633 zu Cassel gestorben, handeln Doppelmayr von der Nürnb. Mathem. S. 163 f. Weidler Hist. Astronom. p. 375 seq. Von ihm schreibet gedachter Landgraf an den Tycho Brahe L. I. Epist. astron. Vraniburgi 1596, Med. Qu. p. 21: qui quasi indagine alter Archimedes ist. Montucla in der Hist. des Mathem. T. I p. 471, 555, schreibet dem Hulsius Tractatus tres ad geodaesiam spectantes zu, die 1603 gedruckt wären. Diese Jahrzahl des Druckes ist falsch; der lateinische Titel ist aus des Dechales Mundo math. T. I p. 17 Edit. post. wörtlich genommen, ohne darauf gesehen zu haben, daß gleich darauf stehet: quos tamen mechanicorum inscripsit, und der Inhalt der ersten drey Tractate angezeigt wird, deren zweyter von einem Artillerlequadranten handelt. Hulsius versprach 15 Tractate von mathematischen Instrumenten herauszugeben, es sind aber nur der erste mit der Jahrzahl 1604, der zweyte 1603, der dritte 1604 und der vierte 1605 herausgekommen. In der Zuschrift an den Churf. Maynz. Rath Hans Reichard Brömser von Rudeßhaim, an welchen jeder Tractat gerichtet ist, dieser dritte vom 20 May 1603, zeiget Hulsius an, daß er diesen Zirkel Burgi bey ihm auf dem Reichstage zu Regenspurg zu allererst gesehen habe. Dieser Zirkel, der auf dem Titel abgebildet ist, bestehet aus zwey Füßen, die an beyden Enden mit Spitzen versehen sind, und einem Knopfe, durch welchen sie verschoben und mit Schrauben gestellt werden können. Die Linien darauf sind: 1) Partes datae ratione rectae diuidendae; 2) Partes datae ratione lineae circularis diuidendae; 3) Proportiones homologorum planorum augendo, minuendo; 4) Proportiones homologorum corporum augendo, minuendo; 5) Diameter, Peripheria; 6) Reductio planorum und 7) Reductio corporum. So theoretisch richtig aber, als auch dieser erste Proportionalzirkel ist, so unbequem ist sein Gebrauch, wegen steter Verrückung des Knopfes, und so leicht ist er wandelbar, wegen dem beständigen Auf- und Zuschrauben; ob ich gleich weiß, daß er in dieser ursprünglichen Gestalt noch zuweilen Liebhaber findet. Das Datum der Zuschrift zeiget, daß dieses die erste Schrift sey, in welcher von einem Proportionalzirkel gehandelt wird, dessen Gestalt aber bald in eine bequemere verwandelt, oder, welches richtiger ist, dergleichen Werkzeug zu einerley Zeit an verschiedenen Orten von mancherley Gestalt erfunden worden.

2. Clavius machte ebenfalls 1604 dieses Werkzeug nach einer bequemeren Einrichtung bekannt.

CHRISTOPHORI CLAVII Geometria practica. Romae, apud Aloysium Zannet, 1604, in Quart.

Catal. Biblioth. Bodlei. T. I p. 164; Hübsches Handschrift, von welcher in der Einl. zur math. Bücherk. XI St. Vorber. Anzeige geschehen.

(*) Eben dieselbe, Moguntiae, 1606, in Medianquart.

(*) Eben dieselbe, Tomo II. Operum CLAVII Moguntiae, 1611, in Folio.

Die Zuschrift ist zu Rom 1604 den 13 Sept. also fast 1½ Jahr später, als Hulsii, aber 1 Jahr und 10 Monate eher, als des Galilei, datirt. An dieses sonst so bekannte Werk des großen Geometers Clavius hat, so viel ich weiß, noch niemand bey der Geschichte des Proportionalzirkels gedacht, da doch dessen itzige Gestalt und vornehmste Einrichtung eher darinnen vorkommt, als ihn Galilei in seiner Schrift bekannt gemacht hat. Es handelt davon Clavius bald zu Anfange L. I c. I p. 3-13 der Maynzer Ausgabe, und zeiget den großen Nutzen dieses Werkzeuges p. 3 also an: Construenda est norma quaedam variarum partium, quam non incongrue *Instrumentum partium* vocare possumus; quod in eo variae partes et ad lineas rectas, et ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes siue Geometricas, siue Astronomicas rite perficiendas contineantur. *Huius enim vsus credi vix potest, quam late pateat* tum in dimetiendis magnitudinibus sine numerorum multiplicatione, tum vero maxime *in horologiis Solaribus* ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum descriptione tradidimus, describendis, *et in aliis rebus tam Geometricis, quam Astronomicis*, vt ex iis, quae capite primo huius libri, et alibi tradituri sumus, perspicuum fiet. Der Zirkel selbst hat völlig die Gestalt, die Galilei angegeben. Auf der einen Seite ist die Linea arithmetica in 100 Theile getheilet, auf der andern die Linea Chordarum Arcus Quadrantis. Die Stellen, welche in der Noua Horologiorum descriptione stehen, sind Operum T. IV p. 213 sqq. 230 enthalten. Es ist also Clavius ein Tertius Interueniens in den Streitigkeiten des Galilei mit dem Capra über die Erfindung dieses Zirkels, und kann mehr, als Capra, den Galilei in Verlegenheit darüber setzen. Indessen, da beyde von des Burgi Zirkel schwerlich etwas gewußt haben, weil Horchers lateinische Erklärung erst 1605 herausgekommen: so lehret folgende Stelle aus dem Clavius p. 4, daß solchen Männern diese Erfindung keine große Schwierigkeit machen können. Es heißt: Fiant ex orichalco, vel alia materia solida duae regulae, aequales omnino, quae ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa eum vniformiter possint moueri, *quemadmodum in Norma vulgari*, quae, prout opus est, constringi potest, et dilatari, fieri solet. Was war leichter, als aus dem Winkelmaaß der Handwerker, wo zwey Lineale sich um ein Gewinde zusammenlegen lassen, einen sochen Proportionalzirkel zu machen? Mithin urtheilet Wolff Comm. de Script. math. C. III §. 39. vom Galilei gar zu hart: *alienum* inuentum sibi attribuisse: denn dem Capra konnte er schwerlich Recht geben.

3. Horchers lateinische Erläuterung der Schrift Hulsii von Burgis Proportionalzirkel kam 1605 heraus.

(*) PHILIPPI HORCHER Berncastellani Philos. et Med. D. Libri Tres: in quibus Constructio Circini Proportionum edocetur. Deinde explicatur, quomodo eodem mediante Circino, tam quantitates continuae, quam discretae, inter se addi, subduci, multipli-

cari, et diuidi: radices tetraëdricae, cubicae, octaëdricae, dodecaëdricae, icosaëdricae, et sphaericae extrahi: vel dictis radicibus datis, illarum solida, et multae aliae proportiones inuestigari, breuissimo compendio possint. Tandem horum omnium vtilitas Exemplis pluribus illustratur. Opus diu desideratum, nunc vero in gratiam Philomathematicorum in lucem editum. Moguntiae, apud Balthasarem Lippium, 1605. In Quart. 54 Seiten, mit Holzschnitten.

In dieser Schrift wird der vom Hulsius bekanntgemachte und practisch beschriebene Proportionalzirkel des Burgi theoretisch mit Anwendung der Euclideischen Lehrart genau erkläret. S. 30 wird ein besonderes Lineal vorgeschlagen, worauf eine gerade Linie in 200 Theile zur Auflösung arithmetischer Aufgaben getheilet werden soll. Dechales T. I p. 17 setzt Horchers Schrift fälschlich vor Hulsii dritten Traktat, der doch ein Jahr eher herausgekommen. Mithin fallen auch seine dreyfachen Bedenklichkeiten weg, 1) ob Horcher vom Galilei, oder dieser von jenem, den Proportionalzirkel habe kennen lernen; 2) ob Burgi älter, als Horcher sey, welches er aus dem Hulsius wissen konnte, wenn er ihn selbst nur flüchtig angesehen hätte; und 3) daß sogar diese vier, nämlich Burgi, Horcher, Galilei und Capra um die Ehre der Erfindung zu streiten hätten. Uebrigens ist Horchers Schrift nicht gemein. Hätte sie Wolff gesehen: so würde er seine Nachricht vom Proportionalzirkel im Mathem. Lex. S. 352 berichtigt haben.

4. Galilei machte seinen Proportionalzirkel 1606 bekannt. Ausgaben seiner italiänischen Schrift.

Le Operazioni del Compasso Geometrico, e Militare. Di GALILEO GALILEI. Stampata in Padova per Pietro Marinelli, 1606, in Folio.

Diese erste gar sehr seltne Ausgabe hat Negri in seiner Istoria degli Scrittori Fiorentini p. 230 angezeigt. Das Jahr 1607 beym Dechales T. I p. 18 ist falsch.

Eben dieselbe Italiänische Schrift zu Padua 1640, und um diese Zeit noch einmal.

Zwey solche spätere Ausgaben führet Carlo Malonessi im Vorbericht zu der Sammlung der Werke des Galilei von 1656 an, doch ohne Angabe der Jahrzahl. Die eine von 1640 stehet im Catal. Bibl. Bodlei. T. I p. 274.

(*) Le Operazioni del Compasso geometrico, e militare. Di GALILEO GALILEI Nobil Fiorentino Lettore delle Matematiche nello studio di Padoua. Dedicato al Serenissimo D. Cosimo Medici Principi di Toscana. In Bologna, per gli H. H. del Dozza, 1656. Con Licenza de' Superiori, Pag. 27-48. Mit Holzschn. und einer Kupfertafel.

Im ersten Bande der sehr seltnen ersten Sammlung der Werke des Galilei, welche Carlo Malonessi zu Bologna 1656 in zwey Quartbänden herausgegeben. Galilei klaget im Vorbericht, daß man ihm diese Erfindung streitig machen wollen, doch ohne jemand zu nennen. Ob er etwa den Clavius gemeint hat? denn Capra meldete sich erst das Jahr darauf. Er zeiget aber an, daß er schon seit 1598 seinen Proportionalzirkel

für

für auswärtige Fürsten habe verfertigen lassen. Die Zuschrift ist 1606 den 10 Julius datirt. Seine Linien sind Arithmetica, Geometrica, Stereometrica, Metallica, Polygraphica, Tetragonica und eine Adiuncta, um den Kreis, Ab- und Ausschnitte, und Monden zu quadriren. Zwischen beyden Regeln ist ein Quadrant mit einer vierfachen Eintheilung angebracht.

Eine Ausgabe zu Rom 1698.

Führet Hübsch in seinen Nachrichten an.

In der neueren Ausgabe der Werke, Florenz 1718, drey Quartbände.

Heumanns Acta Philosophor. III B. S. 804. Nach Herrn Jagemanns sehr nützlichem Magazin der Italiänischen Litteratur II B. S. 91 gäbe es noch eine Ausgabe von vier Quartbänden. Von Berneggers lateinischer Uebersetzung wird nachher gehandelt werden.

5. Capra machte das Jahr darauf 1607 dem Galilei diese Erfindung streitig.

BALTHASARIS CAPRAE Vsus et fabrica cuiusdam Circini Proportionis. Patav. 1607. In Quart, 60½ Seiten.

Catal. Bibl. Bodlei. T. I p. 163. Diese Schrift ist von weit größerer Seltenheit, als die erste Ausgabe der Galileischen, weil, wie Viviani im Leben des Galilei, nach der Uebersetzung in Heumanns Act. Philos. III B. S. 281 berichtet, die Reformatoren der Universität zu Padua, nachdem sie einen förmlichen Proceß hierüber angestellt hatten, und von des Capra (wie es hier heißt) Missethat völlig überzeugt worden, alle Exemplare dieser Schrift confiscirt, und dem Galilei die Erlaubnis gegeben, seine Vertheidigung bekannt zu machen. Auch will Viviani, daß die Neuigkeit und Vortreflichkeit dieser Erfindung viele (wer sind diese?) angereizt habe, es für ihr eigen Werk auszugeben, und Aenderungen zu machen, ohne des rechten Erfinders Meldung zu thun.

(*) Vsus et Fabrica Circini cuiusdam Proportionis, per quem omnia fere tum Euclidis, tum mathematicorum omnium problemata facili negotio resoluuntur. Opera et Studio BALTHASARIS CAPRAE Nobilis Mediolanensis explicata. Bononiae, Typis H. H. de Duccijs, 1655. Super. Permissu. Ein Bogen Titel x. 80 Seiten, mit Holzsch.

Es ist sehr gut, daß zur Beurtheilung dieser Streitigkeit, die confiscirte Schrift des Capra in die Bolognesische Sammlung der Werke des Galilei eingerückt worden, welches ohnstreitig in der oder den neueren Ausgaben auch geschehen seyn wird. Die Zuschrift ist an den Marggraf zu Brandenburg, Joachim Ernst, gerichtet, und zu Padua 1607 den 7 März datirt, wozu ihn die Bekanntschaft mit dem Simon Marius bewogen, also auch mit einem Gegner des Galilei, wegen Entdeckung der Jupiterstrabanten. Hierauf folget ein Glückwunsch IO. ANT. PETRAROLI Regni Neapol. Physici apud flumensas

 vom

vom 1 Januar 1607 Illustri ac Optimo *Iuueni* BALTH. CAPRAE, worinnen ihm die Erfindung zugeschrieben, und er zu deren Bekanntmachung ermuntert wird, um diejenigen zu Schanden zu machen, die sich die Erfindung unverschämt anmaßen, und damit sie zu ihrem großen Schimpfe schamroth werden mögen. Dann stehet des Capra Vorbericht, worinnen er meldet, daß er diese seine Erfindung lange Zeit geheim gehalten habe, und sie endlich itzt bekannt mache, ob er gleich voraus sähe, daß sich ein Oblatrator finden werde 2c. Er hat acht Linien, Linearum, Superficierum, Solidorum, Metallicam, Quadrantis, Circulorum, Quadratiuam und Quinque Solidorum. Die Linea Linearum ist die Arithmetica, von welcher er schreibet, *ab aliquibus* (also wußte er anderer Proportionalzirkel) Linea arithmetica nuncupatur. Zwischen beyden Schenkeln ist ein Quadrant, wie beym Galilei. In der Approbation am Ende dieser Schrift ist die Seitenzahl der ersten Ausgabe derselben angezeigt.

6. Galilei vertheidigte sich noch in eben dem Jahre 1607.

Difese contra le calunnie, et impostura di BALDASSARE CAPRA Milanese; usategli si nella considerazione Astronomica sopra la nuova stella 1604; ed assai più nel publicaro nuovamentente come sua invenzione, la Fabbrica e gli Usi del Compasso Geometrico e Militare, sotto il Titolo Usus et Fabrica Circini cuiusdam Proportionis. Venetiis apud Baglionem 1607. In Quart.

Diesen Titel hat Negri p. 230.

(*) Difesa di GALILEO GALILEI Nobile Fiorentino, Lettore delle Mathematiche nello Studio di Padoua. Contro alle Calunie et imposture di BALDESSAR CAPRA Milanese, Vsategli si nella Considerazione Astronomica sopra la nuoua Stella del 1604. come (et assai più) nel publicare nuouamente come sua inuenzione la fabrica, et gli vsi del Compasso Geometrico, et Militare, sotto il Titolo di Vsus et fabrica Circini cuiusdam proportionis, etc. In Bologna, 1655. Per gli H. H. del Dozza. Con licenza de' Superiori. S. 81 - 160.

Nach des Capra Schrift in der bolognesischen Ausgabe der Werke des Galilei, also auch in der oder den neuern. Galilei behauptet, daß er den Proportionalzirkel vor 10 Jahren (mithin 1597) erfunden habe, und seit der Zeit wohl auf 100 solche Zirkel zu Padua wären verfertigt worden. Alles dieses bestätiget Galilei durch Zeugnisse, unter andern p. 108 des sehr berühmten FR. PAOLO di Venetia de' Serui oder Sarpi, welcher versichert, daß Capra des Galilei Schrift größtentheils übersetzt und geplündert habe. Das Confiscationsdekret von des Capra Schrift stehet S. 123, und S. 124 berichtet Galilei, daß man bey der Untersuchung 440 Exemplare beym Verleger und 13 beym Verfasser gefunden habe, 30 aber schon in verschiedene Gegenden Europens wären vertheilt worden. Der Streit wegen dem neuen Stern im Fuße des Schlangenträgers von 1604 kommt hierbey auch in Betrachtung. Galilei hatte in einigen Lectionen behauptet, daß er kein Meteor wäre, sondern über alle Planeten zu setzen sey; worüber er sich aber die Aristoteliker

stoteliker zu Feinden machte, die nichts veränderliches am Himmel leiden wollten. Daher gab Capra eine Considerazione astronomica über diesen Stern 1606 heraus, in welcher er den Galilei großer und vieler Fehler beschuldigte. Auf alles dieses antwortete dieser mit vielem Nachdruck. Da man nun so vielen Zeugnissen für des Galilei Sache ihre Richtigkeit ohnmöglich absprechen kann: so hat ohnstreitig Capra Unrecht, ob es gleich ein Räzel bleibet, was ihn wohl zu einem solchen dreisten Unternehmen mag bewogen haben? Mich wundert es, daß bey diesem Streit niemand an den Clavius gedacht hat.

7. Des Galilei Proportionalzirkel ist schon 1607 außer Italien bekannt gewesen.

In einem Bande in Großfolio, welcher aus 110 ganz ausnehmend fleißig und sauber von unbekannter Hand gezeichneten Plans von meistens Hungarischen Festungen, auch Werkzeugen und Maschinen zur Artillerie und Gegenständen der Tactik bestehet, und mir geneigt gelehnt worden, befindet sich No. 67 des Galilei Proportionalzirkel von beyden Seiten, jedoch mit einigen Veränderungen der Linien, abgebildet. Die Lineale sind unten mit Spitzen versehen, auf deren einer, zwar sehr klein, aber doch deutlich die Jahrzahl 1607 stehet. Da nun diese Risse augenscheinlich von einerley Hand herrühren, und außer Italien von einem Deutschen verfertigt worden: so muß ihm eher des Galilei Schrift bekannt worden seyn, als Faulhabers und Galgemayers Schriften, nebst Berneggers Uebersetzung von ihm gebraucht werden können.

8. Erste deutsche Schriften über Galileis Proportionalzirkel vom Faulhaber und Galgemayer 1610.

(*) Newe Geometrische vnd Perspectiuische Inuentiones sonderbahrer Instrument — in Truck gegeben: Durch Johann Faulhabern — Frankfurt am Mayn, 1610. In Quart.

S. Einleit. zur mathem. Bücherk. X St. S. 437. Das eine davon ist des Galilei Proportionalzirkel.

George Galgemayers kurtzer und gründlicher Unterricht, wie der künstliche Proportionalzirkel auszutheilen und aufzuzeichnen sey, durch George Brenteln, Bürgern und Malern zu Laugingen, in Druck gegeben. Laugingen, 1610. In Quart, 35 Seiten.

Aus Giersches handschriftlichen Nachrichten, deren in der Einl. z. math. B. Meldung geschiehet. Galgemayer war von Donawerth gebürtig, studirte zu Tübingen Theologie und Mathematik, und ward Pfarr zu Haunsheim, ohnweit seiner Vaterstadt. Doppelmayr S. 94. Auf Brentels Bitte schrieb er diesen Unterricht, in welchem er von Burgis und Galileis Proportionalzirkeln handelt. Diese Schrift hat vielen Beyfall gefunden, und ist mehrmalen aufgelegt worden. Mir sind folgende Ausgaben vorgekommen.

Zu Augspurg 1611.

Leupold S. 121. Ich zweifele an dieser, und halte folgende für die zweyte.

Herrn Georgii Galgemayrs kurzer, gründlicher, gebesserter und vermehrter Unterricht, Zubereitung und Gebrauch der hochnützlichen Mathematischen Instrumenten, Proportional-Schregmäß und Circkels, benebens dem Fundament des Viesirens. Von George Brenzeln. Ulm, 1615. In Quart, 18 Bogen, mit Holzschn. und einer Kupfertafel.

Doppelmayr S. 168; Giersches und Hübsches Nachr.

Zu Augspurg 1633.

Im Verzeichnis einer sehr zahlreichen Sammlung von Rissen, Büchern rc. Nürnb. 1777. 8, welche dem Nürnbergischen Artillerieobristen Edel gehörte, und mit einander feil geboten, auch glücklich so verkauft worden. S. Hrn. Geh. R. Böhms Magazin für Ingen. und Artill. VI B. S. 221.

GEORGII GALGENMAYER Organum Logicum, oder Unterricht zubereitung und gebrauch des Circuls, Schregmes und Linial, in wahrer proportion, schöne Mathematische Kunsten an die Hand gebend, mit nohtwendigen zusatz, sonderlich der Visir- und Sonnen-Uhren-Kunst, vermehrt durch D. IO. REMELIUM. Augsp. 1651. 4.

BEUGHEM p. 325. 358.

(*) Ὄργανον λογικὸν, Herrn Georgij Galgemayrs. Kurtzer gründlicher, wahrhaffter, gebesserter vnd vermehrter Vnterricht, zuberaitung vnd gebrauch, deß Circkels Schregmeß, vnd Linial in wahrer proportion schöne Mathematische Kunststück, durch vnglaubliche behende Vortheil an die Hand gebendt. Allen Kunstliebenden zu sondern Ehren vnd Wolgefallen recht Corrigiert, mit notwendigem Zusatz, vnd anderm sonderlich der Visier: und Kunst Sonnenvhren zureissen, vermehrt, durch weiland den Hochgelehrten Herrn Ioannem Remelium Philos. et Med. Doct. im 1624. Jahrs, anjetzo aber zum vierdtenmal auffgelegt vnd Getruckt zu Franckfurt, In Verlegung Johann Weh, 1654. In Quart. 1 Bog. Tit. Zuschr. des Verlegers und Vorbericht, 128 Seiten, mit Holzschn. und 4 Kupfertafeln.

Es wäre also Remelii Ausgabe das erstemal 1624 herausgekommen, von welcher ich aber keine Anzeige gefunden habe; die zweyte wäre 1633; die dritte 1651; alle drey zu Augspurg, und diese die vierte. Beziehet sich aber die Anzeige auf dem Titel, daß es die vierte Auflage sey, auf alle Ausgaben: so ist die erste von 1610, die zweyte 1615, die dritte aber 1633 oder 1651. Der Proportionalzirkel des Galilei hat hier 9 Linien: Lineae rectae Diuisio, Lineae circularis Diuisio, Graduum Quadrantis, Geometrica, Stereometrica, Reductio Planorum, Reductio Corporum, Astronomica (ist Linea Chordarum) und Arithmetica. Dabey ist eine Fundamentallinie in 1000 Theile getheilt, auf welche die Tafeln berechnet sind. Auch ein Proportionallineal, nach Art des Bramerschen von 1615.

Noch

Noch eine Ausgabe zu Augspurg 1655. In Quart.

In vielen Verzeichnissen, z. E. im dresdner Doubletten-Catalogo P. II p. 233. Vielleicht hat die vorige von 1654 nur ein neues Titelblatt bekommen.

Endlich eine auch zu Augspurg 1688. In Quart.

Leupold S. 121 und in Gierisches Nachrichten.

9. Schriften des Metius über Clavii und Galileis Proportionalzirkel im J. 1611 und folgenden.

(*) Arithmeticae et Geometriae practica ADRIANI METII Alcmar. Matheseos Profess. in Academia Frisiae Franequerana ordin. Franequerae 1611. In Medianquart.

In der practischen Geometrie kommt P. I c. 4. p. 18-30 der Gebrauch des Proportionalzirkels vor, ohne ihn so zu benennen. Es ist augenscheinlich das meiste aus Clavio genommen. Nachher, als Galileis Schrift durch Berneggers Uebersetzung bekannter worden, hat er dessen Proportionalzirkel umständlicher beschrieben. Dahin gehören

ADRIANI METII Praxis noua Geometrica per Usum Circini et Regulae Proportionalis. Franeck. 1623. In Quart.

Catal. Bibl. Bodlei. T. I p. 454; Leupold S. 122. Hiervon ist eine Holländische Uebersetzung vorhanden:

Mætconstigh Lineal of te Proportionalen Ry ende Platten Passer ohnlangs ogt het Latin in onsen Nederlandsen Sprake overgeset door PETRUM BARDT Med. D. et Math. Studiosum. Tot Franecker 1626. In Quart.

Giersch hat diese angemerkt.

(*) Geometriae practicae Pars tertia. Usum Circini et Regulae Proportionalis explicans Autore ADRIANO METIO Alcmariano. Mathes. Professore ordinario. Franeckerae 1625. In Quart.

Dieses ist der besondere Titel vor diesem Theile, der mit fortlaufenden Zahlen von p. 231-278 gehet, nebst noch einem unpaginirten Blat, zu dessen Arithm. L. II et Geom. L. VI. Lugd. Bat. 1626.

10. Bernegger gab von Galileis Schrift eine lateinische Uebersetzung 1612 heraus, mit Anmerkungen, welche ins Italiänische übersetzt worden.

D. GALILAEI DE GALILAEIS Patricii Florentini Math. in Gymnasio Patavino Doct. excellentissimi de Proportionum Instrumento a se inuento Tractatus, a MATTHIA BERNEGGERO ex Ital. in Lat. versus et Notis illustratus. Argentorati 1612. In Quart.

Bibliotheca THUANA P. II p. 78 und anderwärts. Dieses ist die erste Ausgabe einer Arbeit, mit welcher sich ein so berühmter Gelehrter, als ihr Urheber in andern Kenntnissen war, rühmlichst beschäftigen wollen. Diese Uebersetzung schreibet Dechales T. I p. 18 dem Galilei selbst zu, verbessert aber diese falsche Nachricht p. 19.

(*) Tractatus de Proportionum Instrumento, quod merito Compendium vniuersae Geometriae dixeris, Autore GALILAEO GALILAEI, Nobili Florentino, Philosopho et Mathematico Excellentissimo. Ex Italica Lingua Latine conuersus, adiectis Notis, quibus et artificiosa Instrumenti fabrica, et vsus vlterior exponitur. Editio secunda. Argentorati 1635. In Quart. 1 Bog. Tit. und Zuschr. von 1612. Die Uebersetzung p. 1-54, die Anmerkungen in III Abschnitten p. 55-104 mit Holzschn.

Diese Anmerkungen haben die Italiäner für werth geachtet, in ihre Sprache zu übersetzen und auf 6 Bogen in der mehrmalen angeführten Ausgabe der Werke des Galilei abdrucken zu lassen. Der Titel ist:

(*) Annotationi di MATTIA BERNAGGERI Sopra'l Trattato dell' Instrumento delle Proportioni del Sig. *Galileo Galilei*. Nella *Prima Parte* delle quali, con fondamenti Geometrici, s'insegna l'artificiosa construttione, e diuisione d'esso Instrumento. Nella *Seconda* si propongono te dimostrationi, e fondamenti di tutti li Problemi del Sig. Galileo. Nella *Terza* si dimostra l'vso del medesimo Instrumento nel risoluere i Problemi, si d'Euclide, come degl' altri. In Bologna 1655. Presso gli H. H. del Dozza. Con licenza de' Superiori.

11. Bramers und Laurenbergs ähnliche Proportionalinstrumente wurden 1615 bekannt gemacht. Faulhabers erweiterter Gebrauch des Proportionalzirkels bey der Fortification von 1617.

(*) Beschreibunge vnd Vnderricht, wie allerley Theylungen zu den Mathematischen Instrumenten zu verfertigen: Neben dem Gebrauch eines newen Proportional Instruments, In zweyen Theilen verfasset. Beschrieben, vnd den Liebhabern zu gefallen an Tag gegeben, von BENJAMIN BRAMERO, der Mathematischen und Mechanischen Künste Liebhaber, vnd jetzigem Fürstlichen Bawmeyster vnd Geometra zu Marpurg. Gedruckt zu Marpurg bey Paul Egenolff, der löblichen Vniversitet Buchdrucker, 1615. In Quart, 92 S. mit Holzschn.

In der Vorrede geschiehet, außer dem Burgi, Galilei, Horcher, Galgemeyer und Bernegger, auch Francisci Keßlers Meldung, wahrscheinlich des Erfinders des Luft- oder Schwimmgürtels, von welchem mir aber keine Schrift vom Proportionalzirkel bekannt worden. Es macht Bramer aus dem Proportionalzirkel eine Platte in Gestalt eines Sectoris von 45 Graden und 1 F. im Halbmesser, worauf 9 Linien stehen. Um den Mittelpunkt ist eine bewegliche Regel angebracht. Man hat auch von ihm

BENJ. BRAMERI Bericht und Gebrauch eines Proportional-lineals, nebst kurzen Unterricht eines Parallel-Instruments. Marpurg 1617. In Quart.

Leupold S. 121. Auch Giersch. Nachdem der Proportionalzirkel bekannter ward: so künstelte man daran eben so, wie es mit den meisten Werkzeugen zu gehen pflegt. Aus dem Zirkel ward ein bloßes lineal, dergleichen nachher viele zum Vorschein gekommen.

CHRIST. LAURENBERGII Clavis instrumentalis Laurenbergica oder allerhand Aufgaben auf dem Analogischen Arithmetisch-Geometrischen Proportional-Instrument. Leipzig 1615. In Quart.

Giersches Nachrichten. Hübsch giebt 1625 an, welches ein Schreibfehler seyn mag. Nach dem Leupold S. 122 wäre es in Octav.

JO. FAULHABERI Neu-erfundener Gebrauch des Proportional-Circuls zur Fortification. Ulm 1617. In Quart.

Beym LIPENIO Bibl. Philos. T. I. p. 297. Dieser Gebrauch machte den Proportionalzirkel bey den Ingenieurs sehr beliebt, weil man damals folgende Proportion z. E. machte: Beym Viereck ist die Brustwehr 9 F. dicke, wie dicke kommt sie beym Sechseck? Antwort: 4 : 6 = 9 : 12. Ergo 12 F. Hierüber machte sich nun Glaser in den Vernünft. Ged. von der Kriegsbaukunst S. 49 mit Recht nach seiner Art lustig.

12. Galgemayrs neue Künsteleyen, die er 1619 bekannt machte.

George Galgenmayers Centiloquium Circini Proportionum. Nürnberg 1619, in Quart.

Leupold S. 121; LIPENIUS T. I p. 297. Auch vermöge der Zuschrift zur andern Auflage.

(*) Centiloquium Circini Proportionum. Ein newer Proportional-Circkel, von vier, fünff, sechs oder mehr Spitzen, mit hundert schönen, außerlesenen, nützlichen Fragen und Exempeln gezieret und erkläret, wie auch Petri Apiani Organum Catholicum, etc. Allen Liebhabern dieser Kunst zu gutem an Tag gegeben, durch Georgium Galgmayr Danuwerthanum, etc. Sampt einer Vorrede M. Danielis Schwenters Norib. Gedruckt und verlegt zu Nürnberg, durch Simon Halbmayern. In Quart. 2 Bog. Titel, Zuschr. Vorr. Inhalt, 88 Seiten, mit Holzschn. Hierbey nebst einem besondern Titel PETRI APIANI Organon Catholicum 1626. 2 Bl. Tit. Vorr. $5\frac{1}{2}$ Bog. und eine große Figur auf 1 Bogen.

Am Ende der ersten Schrift stehet auch 1626. Die Füße des Zirkels sind in 100 Theile getheilt, auf welchen sich etliche Knöpfe mit Spitzen verschieben lassen. So kann man zwar den Handzirkel entbehren, allein das viele Verschieben und Schrauben taugt nichts. Apians Instrument ist aus seiner oft gedruckten Cosmographie genommen.

men. Es ist ein Winkelmesser, der zugleich zu astronomischem Gebrauch eingerichtet ist.

13. Die erste französische Schrift vom Proportionalzirkel gab Henrion heraus.

Usage du Compas de Proportion, par HENRION. Paris 1624. In Octav.

Dieses wäre nach dem Catal. Bibl. BODLEI. T. I p. 330 die erste Ausgabe; nach dem Dechales p. 20 aber wäre sie von 1623. Allein vermöge des DESHAYES Vorbericht zu folgender Ausgabe ist die erste 1631 herausgekommen, und mit solchem Beyfall aufgenommen worden, daß man sie nachher wenigstens 18 bis 20mal aufgelegt hat, welches keiner Schrift vom Proportionalzirkel widerfahren ist und widerfahren wird.

(*) L'Usage du Compas de Proportion. De D. HENRION, Mathematicien. Nouvellement revû, corrigé, et augmenté en toutes ses parties des plusiers Proportions nouvelles et utiles. Par le Sieur DESHAYES, Professeur e's Mathematiques. Dedié à Monsieur Colbert d'Ormoy etc. a Paris 1681. In Groß-Octav. 1 Titelk. ½ Bog. Tit. Zuschr. Privileg. Vorr. 290 Seiten, 5 Blat Inhalt, mit Holzschn. und 1 K. t.

Der Zirkel hat nur Lineam arithmeticam, geometricam, cubicam und chordarum, oder Les Parties egales, Les Plans, Les Cordes, Les Solides. Er ist so abgebildet, wie ihn der berühmte Bion verfertigt hat, und wie er in allen ältern französischen Bestecken vorkommt. Im Anhange von p. 217 an, werden noch 9 Linien vorgeschlagen, unter andern auch eine Linea Rhomborum, Latitudinum etc. für die Schiffahrt.

14. Conette und Petit französische, Stegmanns, Uttenhofers und Lochmanns deutsche Schriften von der Goldmannischen.

JOACH. STEGMANN Circinus Quadrantarius oder Beschreibung eines Mathematischen Instruments rc. Berlin 1624. In Quart, 7 Bog. 1 K.

Leupold S. 122; Hübsch in seinen Nachrichten, doch ohne Anzeige von dessen Beschaffenheit.

La Geometrie reduite en une facile pratique par deux excellens Instruments dont un est le Pantometre ou Compas de Proportion par MICHEL CONETTE. Paris 1626. In Octav.

Leupold S. 121.

(*) Circinus geometricus, zu Teutsch Meß-Circkel, Nemlich: Ein Geometrisch Instrument rc. durch Caspar Uttenhofern rc. Burgern zu Nürnberg, S. Gedruckt und verlegt durch Simon Halbmayern. 1626. In Quart. 2 Bog. Tit. Zuschr. Vorr. Inhalt, 136 Seiten, mit Holzschn.

Es bestehet aus zwey Stäben, die sich um ein Gewinde öffnen lassen, je länger sie sind, je besser, nebst einem Quadranten, und einem Stabe, der auf den einen gesetzt wird. Diese drey Stäbe sind in beliebige gleiche Theile getheilt und haben Dioptern.

(*) Instrumentum Instrumentorum Mathematicorum, das ist: Ein Newgeordnetes Mathematisch Instrument, w.. es an statt vieler andern Instrumenten, zu allerhand Mathematischen Künsten, alß zur Arithmetica, Geometria, Astronomia, Fortificatoria, Artillerey, Visierung, vnd andern Mechanischen Sachen, lustig vnd bequem, nicht allein mit, sondern auch ohne Rechnung kan gebraucht werden. Allen der hochnützlichen Mathematischen Kunst liebhabern, bevorab den Ingenieurs vnd Kriegs Capitänen, zu sondern Ehren vnd Wolgefallen an Tag gegeben vnd zu Kupffer gebracht durch Wolfgangum Lochmann, J. V. D. vnd Mathematicum. Zu Alten Stettin Gedruckt durch Nicolaum Barthelt, in Verlegung Martini Gutten Buchhändlern in Berlin. 1626. In Quart, 1 Bog. Tit. Zuschr. Vorr. 60 Blätter, mit 8 K. t.

Der Proportionalzirkel ist mit einem Quadranten versehen und hat 10 Linien. Auch können Dioptern und ein Stativ angebracht werden, wodurch er zu einem Feldmesserwerkzeuge wird.

Eine Auflage dieser Lochmannischen Schrift, Rostoch 1627.

Nach Hübsches Anzeige.

P. PETIT Methodus perficiendi unicâ regulâ omnes praxes Circini proportionalis; cum ampla constructione ejus, et tabula gravitatis et magnitudinis metallorum, et reductione ponderum et mensurarum Europae, Africae, et Asiae ad mensuras Parisienses. Parisiis 1634. In Octav.

Ist französisch geschrieben, und wird vom Dechales p. 21. angezeigt, nebst dem Urtheile, daß darinnen wenig vorkäme, was nicht schon bekannt wäre.

15. Goldmanns classische Schrift von 1656.

(*) Tractatus de Usu Proportionatorii sive Circini Proportionalis, cum Tabulis Constructionum et Usu Lineae Munitionum vulgo Fortificatoriae pro delineandis Figuris regularibus et irregularibus nec non Operibus campestribus et externis cum Figuris aeneis ex Conatu NICOLAI GOLDMANI *Vratislaviensis Silesii.*

Eine Ahnleitung vom Gebrauch des Ebenpassers, oder Proportionalcirckels, Mit beygefügten Tafeln zu dehr Theilung dehr Linien. Auch eingeleibtem gebrauche dehr Befestigungs oder Fortificationlinie, die Haubtrisse, dehr Regulier und Irregulier figuren, Wie auch, dehr Feldwercke vnd Aussenwercke zu machen, Sambt nötigen Kupfferstichen, Herausgegeben von NICLAS GOLDMAN, von Breslaw aus Schlesien.

Lugduni Batavorum. Ex Officinâ Philippi de Cro-Y, Impensis Autoris, 1656. In Folio. 1 Bogen Titel, 2 Seiten lateinische Synopsis in Tabellen und latein. Vorrede, 87 gespaltene Seiten Text, lat. und deutsch, 16 K. t.

Dieses Werk ist das erste, in welchem in guter Ordnung, mit Weglassung des Ueberflüßigen, der Proportionalzirkel beschrieben worden. Scheffelt hat dessen 12 Linien beybehalten und ihn mit Recht zum Grunde gelegt. Da Goldmann vom Galilei saget, daß er den Proportionalzirkel zum allerersten in Druck gegeben habe, und er doch auch Clavii Geometriam practicam gekannt hat; so ist es zu verwundern, daß von diesem hier gar nichts angeführet worden. Die Vorrede ist ein Muster von bescheidener Gelassenheit.

Eine andere Ausgabe Lugd. Bat. 1679. Fol. auch 1 Alph. mit 16 K. t.

Diese führet Wolff C. III §. 39 an, und ist wahrscheinlich die vorige erste mit einem neuen Titelblat.

16. Alexander, Casati und Dechales.

Kurtzer Bericht vom Gebrauch des Proportional-Circkels samt beygehörigen Figuren, aufgesetzet durch Andr. Alexandern aus der Marck Brandenburg. Nürnberg 1662. 4. 6 Bogen, 4 Bl. Kupf.

Giersch hat von dieser Schrift angemerkt, daß sich der Urheber, außer anderen Schriftstellern, auch auf den BENED. HEDRAEUM Prof. Upsal. berufe. (Allein außer dieser Anzeige ist mir weiter keine vorgekommen, so unbekannt auch als dessen Schrift von Astrolabio Lugd. Bat. 1643. 8 nicht ist, die er aber noch als ein Stipendiate herausgegeben.) Alexander hat Goldmanns 12 Linien.

Hiervon eine vollständigere Ausgabe. Jena, 1682, in Quart.

Giersch und Hübsch. Auch gehöret hieher von eben diesem Verfasser

(*) Logometron Architecturae militaris, Freitagianae. Kunstmäß der freitagischen Bevestigung, Mit gnugsamer Erklärung des Gebrauchs, und zugehörigen Theilungs-Tafeln; außgefertigt durch Andreas Alexandern, aus der Mark Brandenburg. Arnheim, In verlegung Joh. Friedrich Haagen, Buchhändlers. 1665. Breit Octav. 1 Bog. Tit. Vorber. 94 Seiten, $1\frac{1}{2}$ Bogen Tafeln, 14 K. taf. worunter 2 größere.

Auf der einen größern Tafel ist der Proportionalzirkel mit vielen andern Linien angefüllt abgebildet. Diese Schrift gehöret mit gleichem Rechte zu den Fortificationsschriften, als zu diesen. S. des II St. der Einl. z. math. Bücherk. S. 154.

PAOLO CASATI Fabrica et uso del compasso di proportione. Bologna 1664. In Quart.

Nicerons Nachrichten I Th. S. 442; LIPENIUS T. I p. 297; Leupold S. 121.

Hiervon eine vermehrte Ausgabe 1685.

Niceron ebendaselbst.

(*) R. P. CLAUDII FRANCISCI MILLIET DECHALES Camberiensis e Societate Iesu Cursus seu Mundus Mathematicus. Tomus II. Editio altera. Lugduni 1690. In Folio.

In der Geometria practica p. 8 hat er sehr wenig, bloß die Lineam Arithm. und Chordarum Semicirculi. Die erste Ausgabe ist von 1672. Seine litterarischen und historischen Fehler in dieser Sache sind oben angezeigt worden.

17. Ozanams brauchbare Schrift von 1688.

L'Usage du Compas de Proportion par Mr. OZANAM. Paris, 1688, in Octav.

Ist die erste Ausgabe. Giersch hat sie angemerkt.

(*) L'Usage du Compas de Proportion, expliqué et demontré d'une maniere courte et facile, et augmenté d'un Traité de la division des Champs. Par Mr. OZANAM, Professeur en Mathematique. Suivant la Copie inprimée à Paris. A la Haye 1691. Großduodez. 120 Seiten, die sehr nützliche Schrift von Eintheilung der Figuren bis S. 197, ein Anhang von den zehntheilichten Brüchen bis 216. mit Holzschn. 1 K. t.

(*) Eben diese Schrift, doch ohne den Tractat von den zehntheilichten Brüchen. Nouvelle édition, corrigée et augmentée. à Paris, chez Jean Jombert. 1700. Großoctav. S. 1-92 und 93-139.

Der Proportionalzirkel ist mit dem im Henrion einerley. Der Gebrauch wird strenge erwiesen, doch nur für die Lineas arithm. Planor. Polyg. Chord. et Solid. Ozanams Schriften sind insgesamt brauchbar.

18. Scheffelt der letzte Schriftsteller vom Proportionalzirkel im vorigen Jahrhundert.

Michael Scheffelts Unterricht vom Proportional-Zirkel. Ulm, in Verlegung des Autoris. 1697. In Quart. 6 Bog. 12 K. t.

Giersch. Hübsch hat 19½ Bogen Text angemerkt.

(*) Michael Scheffelts, Ulm. Instrumentum Proportionum, oder Unterricht vom Proportional-Zirkul rc. Ulm, verlegts Daniel Bartholomä, Buchhändler, 1708. In Quart. 1 Titelbl. 3 Bl. Vorr. zu der ersten Ausgabe von Alberto Veiel, in Gymnas. Ulm. Phys. et Math. Prof. Publ. 1 Bl. Vorr. zu dieser Ausg. 7 Bl. Inhalt, 148 Seiten, 1 Bogen Museum mathematicum, 12 K. t.

Ein von Scheffelt verfertigter Proportionalzirkel, den ich gesehen habe, war sehr gut und sauber gearbeitet. Da Holdmanns vollständige Schrift selten zu haben ist, die ältern deutschen Schriftsteller aber wenig vorkommen, auch nicht so brauchbar sind: so war Scheffelts Tractat bey deutschen Lesern derjenige, dessen man sich zum Unterricht zu bedienen pflegte.

19. Schriftsteller in der ersten Hälfte des itzigen Jahrhunderts.

(*) La Geometrie pratique, Tome second. — Par ALLAIN MANESSON MALLET, à Paris 1702. Groß Medianoctav.

In dieser bekannten prächtigen praktischen Geometrie, die aus vier Bänden bestehet, und deren 2ter Theil 120, das ganze Werk 500 Kupfer hat, die aber zum Theil schlecht gerathen sind, wird L. II c. 4 p. 99-138 vom Proportionalzirkel sehr deutlich gehandelt.

Traité de la Construction et des principaux usages des Instruments de Mathematique par NICOL. BION. a Paris 1709. Med. Oct. 1 Alph. 28 K.

Wolff de Scr. math. C. X §. 35. Nachher, wie Giersch angemerkt hat, Paris 1716, 8; a la Haye 1723, 4; vermehrt Paris 1725, 4.

(*) NICOLAI BION — Neu-eröffnete Mathematische Werck-Schule — aus dem Französischen ins Teutsche übersetzt. Franckfurt und Leipz. 1712. In Quart. 2 Alph. 5 Bog. 28 K. t.

Doppelmayr unterschrieb seinen Vorbericht nur mit I. G. D. P. P. nannte sich aber bey der

Weiteren Eröffnung der neuen Mathematischen Werk-Schule. Nürnb. 1717. 7 Bog. 12 K. t. und dritten Eröffnung, Nürnberg 1728, 1 Alph. ½ Bog. 20 K. t.

Man hat auch alle 3 Theile mit neuen Titelblättern 1765 versehen. In dem ersten wird im II Buche S. 29-77 umständlich von dem Proportionalzirkel und seinen 12 Linien gehandelt, obgleich Tab. VI das Werkzeug nur nach eben der Art abgebildet ist, wie es im Henrion, Ozanam und Mallet vorkommt. Dieses Doppelmayrische Werk verdiente von Herrn Brandern fortgesetzt zu werden.

(*) Leonh. Chr. Sturms — vier kurtze Abhandlungen. I. Von Geometrischer Verzeichnung der regulieren Vielecke. II. Von dem Gebrauch des Proportional-Circuls. III. Von der Trigonometria plana. IV. Von der Marckscheide-Kunst. Als ein Anhang der kurtzen gesamten Mathesis beyzufügen — Franckf. an der Oder 1710. In Oct. 2 Bog. Tit. Zuschr. Vorr. 72 Seiten, 5 K. t.

Vom Proportionalzirkel handelt S. 12-22 und beurtheilet dessen Linien nicht unrecht. Von dieser Schrift ist mit Weglassung der sehr lehrreichen Vorrede Sturms von Verbesserung der Academien und sonderlich des Studii politici auf denselben,

(*) eine

(*) eine neue Auflage mit J. Fr. Polacks Vorrede 1743 vorhanden,

wo aber nur der erste Bogen neu gedruckt ist. Polacks Urtheil vom Proportionalzirkel ist auch gegründet.

(*) Das bishero ganz unbekante Instrument, Polygraphometrum novum — erfunden und herausgegeben von Johann Christoph Barnikel. Leipzig 1724, Octav, 1½ Bog. Tit. Zuschr. Vorr. 16 Bog. 36 K. t.

Dieses Werkzeug ist nichts anders, als ein mit einem Lineal vermehrter Proportionalzirkel, welches unten an dessen einem Fuße sich drehen und in einem Einschnitt des andern Fußes verschieben läßt. Mithin kommt in dieser Schrift der ganze Unterricht vom Gebrauch des Proportionalzirkels vor, welcher ganz gut gerathen ist.

(*) Jac. Leupolds Theatrum Arithmetico-Geometricum. Leipzig 1727. Groß-folio, mit 45 K. t.

Diesen Band gaben Leupolds Erben heraus, welche in der Vorrede zugestehen, daß er noch unvollständig sey. Indessen ist alles, was C. XVI p. 86-112 von des Galilei Proportionalzirkel C. XVII p. 112-119 von des Burgi und C. XVIII vom Proportionallineal gelehrt wird, sehr umständlich und genau. S. 121. 122 kommt eine Liste hieher gehöriger Schriften vor, welche in diesem Verzeichnis hoffentlich berichtigt worden. Da das ganze Werk, so brauchbar es auch ist, viel zu theuer ist: so wird man diese neue Ausgabe von Scheffelts Tractat nicht gänzlich für überflüßig halten können.

A new Treatise of the Construction and use of the Sector by SAMUEL CUNE, revised by EDMUND STONE. London 1729. In Octav. 15 Bog. 2 K. t. und Holzschn.

Wolff C. III §. 39; Act. Erudit. 1730 p. 131. Sonst habe ich keine Anzeige von einem in Englischer Sprache herausgegebenen Werke über den Proportionalzirkel gefunden, denn des Partridge Schrift beym Leupold S. 121 mag wohl nicht hieher gehören.

(*) JOH. FRIEDR. PENTHERS Praxis Geometriae. Vte Ausgabe. Augsb. 1755. In Folio.

In diesem bekannten nützlichen Werke wird auch in einigen Stellen vom Gebrauch des Proportionalzirkels gehandelt.

20. Lamberts neue und nützlichste Einrichtung des Proportionalzirkels.

(*) D. H. Lamberts freye Perspective. Zürich 1759, in Octav.

Obgleich schon Faulhaber und insonderheit Scheffelt nebst denjenigen, die diesen zum Grunde gelegt, den Nutzen des Proportionalzirkels in der Perspective kürzlich gezeigt haben: so hat Lambert, dem nichts in der ausübenden Mathematik unbekannt

war, was noch verbessert werden konnte, auch hinerinnen alle übertroffen, und in dieser Schrift S. 44-61 vom Proportionalzirkel nicht allein gehandelt, wie er ist, sondern auch, wie er zu perspectivischen Zeichnungen nützlich eingerichtet werden könne. Nach diesem Vorschlage verfertigte ihn Herr **Brander**, und **Lambert** beschrieb ihn in folgender Schrift:

(*) Kurzgefaßte Regeln zu perspectivischen Zeichnungen, vermittelst eines zu deren Ausübung so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportional-Zirkels durch J. H. **Lambert**. Augsb. 1768. In Octav. 2 Bog. 2 K. t.

Auf der 1 K. t. sind beyde Seiten eines solchen Proportionalzirkels sehr gut abgebildet. Auf der einen sind 5 Perspectivlinien, auf der andern die Linea arithmetica von 400 Theilen, Linea Tang. sec. sinuum und eine Linea elliptica. Diese letzte Linie ist von ausnehmend grossem Nutzen bey astronomischen Zeichnungen; und da man gar füglich auf den gewöhnlichen Proportionalzirkeln der übrigen Linien entbehren kann: so halte ich dafür, daß **Lambert** dieses Werkzeug mehr, als alle andere Schriftsteller, nutzbar gemacht habe.

(*) **Lamberts** freye Perspective, zweyter Theil. Zürich 1774.

In diesem wird von der angezeigten Verbesserung des Proportionalzirkels Nachricht ertheilet S. 104. 105.

(*) Herr Hofr. **Karstens** Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der VIIde Theil. Die Optik und Perspectiv. Greifswald 1775. Octav.

In diesem vollständigsten Lehrbegriff der Perspectiv wird also auch S. 175-185 vom Gebrauch des Proportionalzirkels gehandelt.

21. Die neueste Beurtheilung und Anwendung dieses Werkzeuges.

(*) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie, entworfen von M. **Johann Tobias Mayer**. I Theil. Göttingen 1777, in Octav.

In diesem unentbehrlichen Werke, dessen glücklichen Vollendung jeder Verehrer der Mathematik entgegen siehet, hat der Herr Professor S. 260-268 das wichtigste von dem Gebrauch des Proportionalzirkels in Beziehung auf die Geometrie mitgenommen und von den dahingehörigen Schriften Nachricht ertheilt, in welcher sich vielleicht einiges aus dieser ergänzen und berichtigen läßt. Das Urtheil von dessen Gebrauch S. 266 ist so beschaffen, daß dadurch nicht ganz seine Empfelung überflüßig wird.

(*) Beschreibung und Gebrauch eines geometrischen Instruments in Gestalt eines Proportionalzirkels — von **Ge. Fr. Brander**. Augsb. 1780. Octav. 4 Bog. 2 K. t.

Auch zwey Schenkel mit Linien auf beyden Seiten, nebst einem Chordenlineal, ohngefehr wie **Barnikels** Polygraphometrum §. 19.

22. Dop-

22. Doppelter Anhang von Schriftstellern.

I. Beym LIPENIO T. I p. 297 wird: *Nic. Forest*, Rhemensis Gallus, de Circino Proportionis. Rhemis, ohne Anzeige des Orts, Jahres und Formats, und vom Leupold S. 121: *Sethi Partridge* Descriptio Instrumenti, quod vulgo dicitur duplex Scala Proportionis, Anglice, Lond. 8 ohne Jahrzahl, angeführet.

II. Leupold führt in seinem Verzeichnis noch folgende vier Schriftsteller an, von welchen die Schriften der drey letzten im Catal. Bibl. Bodl. T. I p. 248. 343. T. II p. 140 vorkommen, nehmlich 1) *Dolz* Cumbula omnium fere scientiarum et praecipue in Proportionibus et Proportionalibus. Montalbani 1518. 2) *Joh. Fernelius* de Proportionibus. Paris. 1528. Fol. 3) *Nic. Horen* Tractatus Proportionum. Venet. 1505. 4) *Alb. de Saxonia* Tractatus Proportionum. Venet. 1519. 4. Obwohl in diesen Schriften etwa eine ältere Spur von diesem oder einem ähnlichen Werkzeuge vorkommen möchte?

Alphabetisches Nahmenverzeichnis.



I. Vom Proportionalzirkel überhaupt.

§. 1. Erklärung.

Der Proportionalzirkel ist ein Werkzeug *), welches aus zwey gleichen und ähnlichen Linealen bestehet, die wie beyde Füße eines Zirkels beweglich sind. Auf ihnen sind verschiedene Paare eingetheilter Linien aufgetragen, vermittelst welcher eine gerade Linie gefunden werden kann, die zu einer gegebenen Linie in gleicher Verhältnis mit zwey Abtheilungen einer solchen eingetheilten Linie stehet **).

*) Oder besser mit Goldmann, ein Kunstzeug. Wer aber mit solchen Kunstzeugen nur handwerksmäßig umzugehen weiß, dem sind sie Werkzeuge.

**) Z. E. wenn die Seite eines gleichseitigen Dreyecks gegeben ist, und man die Seite eines ihm gleichen ordentlichen Fünfecks finden will: so stehen auf der einen Seite des Proportionalzirkels zwey gleiche Linien, auf deren jeder die Seiten eines gleichseitigen Dreyecks und des ihm gleichen ordentlichen Fünfecks nach einer willkührlich angenommenen Einheit aufgetragen sind.

§. 2. Materie.

Gemeiniglich wird er aus Messing verfertigt; von Kupfer ist er nicht gewöhnlich. Mathematische Werkzeuge aus Silber schmutzen zu sehr, außer, wenn sie vergoldet werden. Helfenbeinerne werfen sich zu leicht. Allenfalls kann er aus einem festen Holze, z. E. aus Ebenholz, mit weiß eingelassenen Linien und Zahlen verfertigt werden, dergleichen Maaßstäbe nicht ungewöhnlich sind. Man nimmt auch zuweilen ein wenig härteres Holz dazu, und leimet die in Kupfer gestochne Linien darauf, welches zwar nicht viel genaues geben, doch aber ein wohlfeiles Modell vorstellen kann. Uebrigens werden auf dem Metall die eingelassenen Linien und Zahlen mit Buchdruckerschwärze kenntlich gemacht; an deren Statt von einigen Zinnober genommen wird, welches ein gutes Ansehen giebt.

§. 3. Uebliche Gestalt.

Daß beyde Füße eines Proportionalzirkels aus zwey gleichen und ähnlichen rechtwinklichten Linealen bestehen, ist an sich gar nicht nothwendig. Denn wenn, wie Tab. II Fig. 3 zeiget, und sich aus dem folgenden ergeben wird, auf beyden noch so verschiedentlich gestalteten Füßen, welche nur 1) sich um einen Stift A drehen lassen, und 2) wo die Oberfläche eines jeden für sich eben ist, zwey gleiche und nach gegebenen Verhältnissen auf gleiche Art eingetheilte Linien AB, AC aufgetragen sind, die in A zusammentreffen, und so zu einer gegebenen Linie BC eine gesucht wird, die sich wie AB : AD oder wie AC : AE verhalte: so ist, weil jeder geradlinichter Winkel ein ebener ist, und also die Dreyecke ABC, ADE in einerley Ebene liegen, ohne alle Rücksicht auf die Gestalt der Füße AB : AD = BC : DE. Weil man ihn aber 1) für jede gegebene BC, sie sey sehr groß oder klein, bequem brauchen, 2) durch

überflüßige

überflüßige Zierrathen, wenn sie auch nach dem neuesten Geschmack wären, nicht zu schwer machen darf, vornehmlich aber 3) die richtige Verbindung beyder Füße und der bequeme Gebrauch auf dem Reißbret nothwendig machen, daß auf jeder Seite beyde Oberflächen der Füße zu einerley Ebene gehören: so kommt keine bessere und schicklichere Gestalt heraus, als die angezeigte ist. Man läßt es also geschehen, daß bloß an dem untern Theile beyder Lineale, wo man sie anfaßt, einige kleine Zierrathen angebracht werden.

§. 4. Das Gewinde.

Dieses ist dem Gewinde eines jeden Hand- oder Reißzirkels ähnlich. Es werden zwey kleine gleiche Scheiben an den einen Fuß und eine eben so große an den andern Fuß gelöthet. Durch alle drey gehet ein Stift von gehärtetem Stahle, dessen Mittelpunkt auf jeder Seite die gemeinschaftliche Spitze aller Winkel ist, welche die Paare gleichnahmiger Linien auf einerley Seite einschließen. Es muß sich also der Proportionalzirkel bis an diesen Stift öffnen lassen, und die Einrichtung des Gewindes in Bions Mathem. Werkschule S. 29 f. ist der Leupoldischen im Theatr. Arithm. Geom. §. 176 Tab. XVII Fig. I-IV und unten auf Tab. XVIII vorzuziehen.

§. 5. Ein anderes sehr gutes Gewinde.

Ich besitze einen großen messingenen Proportionalzirkel, welcher sehr sauber und genau von *Johann Eggerich Frersz* zu Leyden verfertigt worden. Nach Pariser Maaß ist er 13 Zoll lang, jedes Lineal $1\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{3}$ Zoll dicke, also ziemlich schwer. Sein schönes Gewinde verdienet hier beschrieben zu werden, weil im Bion dergleichen nicht vorkommt, auch solches von einem andern beym Leupold §. 177 Tab. XVII Fig. VI abweichet, beyde Bücher aber die Handbücher Deutscher Künstler sind. Ich habe es Tab. II Fig. 4 nach beygefügtem Maaßstabe genau abgezeichnet. An dem einen Fuße sind die Scheiben A, B in einer Weite von $\frac{8}{10}$ Lin. parallel befestiget. Jede ist $\frac{6}{10}$ Lin. dicke. An dem andern Fuße ist die Scheibe C von $\frac{8}{10}$ Lin. Dicke, befestiget, die also zwischen A und B genau einpaßt. Angelöthet sind diese Scheiben an beyden Füßen nicht; wie sie aber daran befestigt sind, das habe ich, ohne vielleicht das Werkzeug zu verderben, nicht untersuchen wollen. So viel siehet man, daß dazu an jedem Fuße zwey starke stählerne Schrauben dienen, deren Köpfe auf seiner äußeren Schärfe in M und N eingelassen sind. OM ist 1 Zoll, MN 10 Linien. Die Befestigung beyder Füße geschiehet vermittelst einer kleinen Scheibe D, welche so dick ist, als B und C zusammengenommen, also $1\frac{4}{10}$ Lin. Diese Schribe D paßt aufs genaueste in die Hölungen der Scheiben B und C, und ist vermittelst etlicher Schrauben an A befestiget. Der stählerne Stift, der D mit A verbindet, gehet durch aller Schreiben Mittelpunkte. Die Halbmesser sind FE 1 Zoll $2\frac{1}{2}$ Lin. FI $10\frac{1}{2}$ Lin. FG $7\frac{1}{2}$ Lin. FH 2 Lin. des Stifts $\frac{1}{2}$ Lin. Uebrigens hält dieser Proportionalzirkel alle folgende Proben aus.

§. 6. Wie ein Proportionalzirkel zu prüfen sey.

I. Die Oberflächen beyder Füße müssen in einerley Ebene liegen, das Werkzeug mag geöffnet seyn, oder nicht.

II. Weil man beyde Füße rechteckicht zu machen pfleget, ob es gleich nicht nothwendig ist, §. 3: so muß unter dieser Bedingung der ganz geöffnete Proportionalzirkel ein Lineal vorstellen. Ist dieses, so werden auch

III. beyde innere Schärfen genau auf einander passen, wenn beyde Füße zusammen gedrückt werden, ohne sich im geringsten von selbst aus einander zu rücken, welches auch die Güte des Gewindes anzeiget; und diese Schärfen werden diejenige Linie vorstellen, welche jeden Winkel halbiret, den zwey gleichnahmige Linien einschließen.

IV. Wenn man mit einem Handzirkel vom Mittelpuncte aus auf einer gewissen Linie eine beliebige Weite nimmt, und nur den Proportionalzirkel willkührlich öffnet: so muß auf ihr und der andern gleichnahmigen Linie die vorige Länge gefunden werden, wenn der Stift gut befestiget ist.

V. Eröffnet man das Werkzeug oder beuget beyde Füße aus einander, wobey man aber behutsam verfahren muß: so muß solches weder zu stramm noch zu locker angehen. Die Schrauben an dem §. 5 beschriebenen Gewinde für die Scheibe D, dienen vorzüglich zum Nachhelfen, wie bey Hand- und Reißzirkeln geschiehet, welche verschraubte Köpfe haben. Bey den gewöhnlichen Gewinden pflegt schon der Künstler zuweilen mit Wachs nachzuhelfen.

VI. Die Theilungspunkte müssen mitten in jeder Linie so fein, als möglich, aber doch so tief mit einem runden Stahl eingeschlagen seyn, daß die eingesetzten Spitzen des Handzirkels nicht leicht ausweichen können, wodurch auch nur das Werkzeug verdorben würde. Wie aber die Eintheilung der Linien zu prüfen sey, wird bey dem Unterricht von jeder gelehret werden.

> **Goldmann** behauptet S. 2, daß ein guter Proportionalzirkel unter den mathematischen Kunstzeugen ein Meisterstück sey, aus dem man einen rechtschaffenen Meister kenne. Vom Gewinde kann man es zugeben. Allein die Eintheilung ist nicht so gar schwer zu erhalten, wenn man nur einen guten verjüngten Maaßstab hat, und mit erforderlicher Geduld verfähret. Hierüber verdienet Herrn Prof. **Mayers** practische Geometrie I Th. S. 283 f. nachgelesen zu werden.

§. 7. Größe.

Weil, wie sich im folgenden ergeben wird, die Abtheilungen aller Linien des Proportionalzirkels auf der Arithmetischen beruhen, welcher man 200 Theile zu geben pfleget: so kann er überhaupt jede Länge haben, bey welcher sich die Arithmetische Linie in noch so merkliche Theile eintheilen läßt, von deren jedem sich wenigstens noch die Hälfte mit dem Augenmaaß angeben

angeben läßt. Dieses aber gehet bey der gewöhnlichsten Länge von ½ Pariser Fuß noch an; man macht ihn aber öfters etwas größer. Eine Länge von 13 Zollen, wie der §. 5 beschriebene hat, giebt dem Werkzeuge zwar ein gutes Ansehen, und man kann ohne große Kunst von jedem 200sten Theile der Arithmetischen Linie noch die Zehntheile darauf angeben: allein seine Schwere macht ihn unbequem, und eine solche Größe viel zu kostbar, als daß ein solcher Aufwand nothwendig würde.

§. 8. Gewöhnliche Anzahl und Benennung der darauf befindlichen Linien.

Auf jeder Seite, wie Tab. I Fig. 1 zeigt, sind 6 Paar Linien gezeichnet, von welchen aber nur ein Paar im Mittelpunkte des Stifts zusammentrifft, weil solches bey den übrigen theils unnöthig ist, theils ohne Verwirrung bey so spitzigen Winkeln nicht angehet. Außer diesen 12 Linien werden zur Seite noch so viele Linien angebracht, als schicklicher Platz da ist oder für gut befunden wird. Diese 12 Linien sind

I. auf der einen Seite (in der Figur zur linken Hand)

1. Arithmetica
2. Geometrica
3. Tetragonica
4. Subtensarum Angulorum Polygonorum
5. Reducendorum Planorum et Corporum regularium
6. Corporum Sphaerae inscribendorum

Linea Tangentium.

II. Auf der andern Seite (in der Figur zur rechten Hand)

1. Cubica
2. Chordarum
3. Circuli diuidendi
4. Rectae extrema ac media ratione diuidendae
5. Fortificatoria
6. Metallica

1 ♄ ♂.

§. 9. Von anderen Linien, die sich auf dem Proportionalzirkel auftragen lassen.

Für alle Fälle, wo man eine mittlere, dritte oder vierte Proportionalgröße aus gegebenen finden, und diese in Zahlen oder Linien ausdrücken, angeben oder darstellen kann (exponere), lassen sich auch die dahin gehörigen Linien auftragen; woraus aber bey so viel Linien und Zahlen leicht eine Verwechselung entstehen dürfte. Die §. 8 angezeigten Linien sind die gewöhnlichsten.

Man

Man hat besondere Proportionalzirkel für Ingenieurs und Artilleristen, worauf sich bloß 1) Linea Fortificatoria 2) Operum externorum 3) Operum campestrium und 4) Mortarium dirigens befinden. Allein ihr Gebrauch fällt heut zu Tage völlig weg, wie sich unten bey dem Unterricht von der Linea fortificatoria ergeben wird. Was für Linien, außer den gewöhnlichen, von andern vorgeschlagen worden, ist in der historischen Einleitung angezeigt worden, worunter **Lamberts** Einrichtung ohnstreitig den Vorzug verdienet.

§. 10. Nöthiger Handzirkel.

Der Gebrauch des Proportionalzirkels erfordert einen guten Handzirkel von 5 bis 6 Zollen. Bey einem großen Proportionalzirkel muß man den Stangenzirkel zu Hülfe nehmen. Die größte Weite, die auf ihm genommen werden kann, ist allemal kleiner, als die doppelte Länge einer seiner Linien. Denn weil bey völliger Oeffnung des Proportionalzirkels jedes Paar gleichnahmiger Linien einen stumpfen Winkel macht: so ist die Weite ihrer beyden Endpunkte die dritte Seite eines gleichschenklichten Dreyecks, welche nothwendig kleiner ist, als beyde übrigen Seiten zusammengenommen, oder als die doppelte Länge einer solchen Linie. Nach der Zeichnung Tab. I Fig. 1 ist jede Linie 5 Zoll, $5\frac{1}{4}$ Lin. Paris. lang, wozu also ein 6 Zoll langer Handzirkel gehöret, um die größte Weite sicher zu fassen. Auf dem §. 5 beschriebenen ist jede Linie 11 Zoll $4\frac{7}{10}$ Lin. lang, wo also für die größte Weite ein Handzirkel von 1 Fuß gehörte, an dessen Statt ein Stangenzirkel von 2 Fuß genommen werden muß.

§. 11. Auf wie vielerley Art die Weiten auf dem Proportionalzirkel genommen werden.

Eine Weite oder Linie wird auf einem Proportionalzirkel mit einem Hand- oder Stangenzirkel genommen

I. *Directe*, **gerade, nach der Länge**, wenn man den einen Fuß des Zirkels in den Mittelpunkt des Stifts, den andern aber in einen Theilungspunkt einer gegebenen Linie setzt, der Proportionalzirkel mag ungeöffnet oder geöffnet seyn.

II. *Transuersim*, **überzwerch, nach der Breite**, wenn man bey geöffnetem Werkzeuge beyde Füße des Zirkels in zwey Theilungspunkte eines Paares gleichnahmiger Linien von gleichen Zahlen stellet. Solches geschiehet entweder, wenn man das Werkzeug bis auf eine gegebene Weite öffnet, wo sich also die Oeffnung des Proportionalzirkels nach der Oeffnung des Handzirkels richtet; oder, wenn man bey einer gegebenen Oeffnung des Proportionalzirkels eine Weite zwischen zwey Punkten von gegebenen gleichen Zahlen nimmt, mithin die Oeffnung des Handzirkels durch die Oeffnung des Proportionalzirkels bestimmt wird.

Um den Vortrag abzukürzen, wird hier ein für allemal angemerkt, daß z. E. eine **Linie überzwerch zwischen 50 stellen**, so viel anzeige, als eine Linie überzwerch oder transuersim zwischen 50 **und** 50 stellen, d. i. zwischen beyde Punkte gleichnahmiger Linien, bey welchen die Zahl 50 stehet.

III. *Obli-*

III. *Oblique*, schief, wenn man den Handzirkel zwischen zwey Theilungspunkte gleichnahmiger Linien von ungleichen Zahlen stellet.

IV. *Tentando*, versuchend, wenn man bey gegebener Oeffnung des Proportionalzirkels diejenigen zwey Theilungspunkte von gleichen Zahlen suchet, zwischen welchen sich der Handzirkel mit seiner gegebenen Oeffnung oder Weite stellen läßt.

§. 12. Theorie des Proportionalzirkels.

I. Wenn in einem geradlinichten Dreyeck ABC (Tab. II Fig. 5) mit dessen einer Seite BC eine Parallellinie DE gezogen wird: so werden beyde übrige Seiten AB, AC von einer solchen Parallellinie in proportionirte Stücke getheilt, oder es ist

AD:DB = AE:EC Euclid. VI B. 2 S.

II. Es ist aber auch AD + DB:AD = AE + EC:AE, V B. 12 S.
d. i. AB:AD = AC:AE, I B. 13 Allgem. Satz.
mithin AD:AB = AE:AC, V B. 4 S.

III. Weil beyde Dreyecke ABC, ADE einen gemeinschaftlichen Winkel A haben:
so ist zugleich AD:DE = AB:BC, VI B. 6 S.
Demnach AD:AB = DE:BC, V B. 16 S.
Allein es war *AD:AB = AE:AC*, nach N. II.
Folglich DE:BC = AD:AB = AE:AC, V B. 11 S.

§. 13. Allgemeine Anwendung derselben.

Auf dem Proportionalzirkel schließen (Tab. II Fig. 6) jede zwey gleichnahmige Linien AM, AN einen Winkel MAN ein, dessen Größe von einer überzwerch gestellten Linie DE oder BC abhänget. Es ist aber allemal, wenn eine Linie überzwerch genommen wird, AD = AE, oder AB = AC §. 11 N. III. Demnach AD:AB = AE:AC Euclid. V B. 7 S. Wenn also für eine gegebene Weite DE die eine Spitze des Handzirkels in D auf der einen Linie AM gestellt wird, und die andere in E auf der gleichnahmigen Linie AN, und so bey unverrückter Oeffnung für die gesuchte Linie die eine Spitze des Handzirkels in B auch auf AM, die andere aber in C auf AN gestellt, d. h. DE, BC überzwerch genommen werden: so ist, weil wegen unverrückter Oeffnung die Dreyecke DAE, BAC den gemeinschaftlichen Winkel BAC haben, und, wie erwiesen worden, AD:AB = AE:AC ist, auch AD:AB = DE:BC §. 12 N. III. Da nun AD, AB nach einem bestimmten Maaß gegeben sind: so wird zu der nach eben demselben oder einem jeden andern Maaß gegebenen Linie DE eine andre BC von eben diesem Maaße gefunden, die sich zu DE verhält, wie BA:DA, oder CA:EA. Eben dieses gilt, wenn BC gegeben und DE gefunden wird. Wenn also DE = AD = AE ist: so ist auch BC = AB = AC, und ADE, ABC sind gleichseitige Dreyecke. Ist AB = DE: so hat man AD:AB = AB:BC, und also ist BC die dritte Proportionallinie zu AD, AB. Aber auf diese Art läßt sich nicht die mittlere Proportionallinie zu zwey gegebenen fin-

den, weil, wenn in AD:DE = AB:BC, beyde AD, BC gegeben sind, und AB = DE gesucht wird, zwar der Punkt D auf dem Proportionalzirkel gegeben ist, aber BC unter jeder Oeffnung überzwerch gestellt werden kann, mithin der Punkt B nicht gegeben ist, welcher AB = DE gäbe. Es werden daher andere Verfahren nöthig seyn, von welchen im folgenden wird gehandelt werden.

§. 14. Allgemeines Verfahren, wenn die gegebenen Linien für einen vorräthigen Proportionalzirkel zu klein oder zu groß sind.

I Fall. **Wenn die gegebene Linie zu klein ist.** Es sey z. E. ein gleichseitiges Dreyeck gegeben, dessen Seite FG (Tab. II Fig. 7. I) kleiner sey, als die Weite der Anfangspunkte der Lineae tetragonicae bey ungeöffnetem Werkzeuge; man suchet die Seite des ihm gleichen Vierecks. Es sey also (eben daselbst Fig. 8) AB die Seite des gleichseitigen Dreyecks, AD die Seite des ihm gleichen Vierecks, so daß AB die Lineam Tetrag. vorstelle. Demnach, wenn der Winkel BAC der Winkel beyder Linear. tetrag. des ungeöffneten Werkzeuges ist: so ist überzwerch genommen, DE die Seite des Vierecks, welches dem gleichseitigen Dreyeck gleich ist, dessen Seite BC die kleinste Weite zwischen B und C ist. Weil also FG noch kleiner, als BC ist: so verlängere man FG, und mache die verlängerte Ff etliche mal größer, als FG, bis Ff größer als BC werde, z. E. 3 mal. Stellet also Ff überzwerch in Bb, und nehmet unverrückt Dd auch überzwerch: so ist Dd auch eben so vielmal größer, als die gesuchte Seite des Vierecks, als vielmal Ff größer, als FG war. Denn es ist AD : AB = DE : BC = nDE : nBC, wo n jedes vielfache, hier z. E. 3 bedeutet. Wäre nun Hh, Fig. 7. II, die gefundene Linie: so ist $\frac{1}{3}$ Hh = HI, also die gesuchte Seite des Vierecks, welches dem gleichseitigen Dreyeck gleich ist, dessen Seite FG = $\frac{1}{3}$ Ff ist.

II Fall. **Wenn die gegebene Linie zu groß ist.** Hier findet das vorige umgekehrt Statt. Es sey in vorigen Figuren Ff größer, als die größte Weite des Proportionalzirkels für eine gegebene Art der Linien, z. E. für die Seite eines gleichseitigen Dreyecks, zu dem die Seite des ihm gleichen Vierecks gesucht wird. Theilet also Ff in gleiche Theile, z. E. in 3, und stellet FG = $\frac{1}{3}$ Ff überzwerch in BC, und nehmet überzwerch und unverrückt DE. Wenn nun Bb = Ff und BC = $\frac{1}{3}$ Bb = $\frac{1}{3}$ Ff = FG ist: so ist auch DE = $\frac{1}{3}$ Dd = $\frac{1}{3}$ Hh = HI, und Hh ist die gesuchte Seite. Denn es ist AD : AB = Dd : Bb = $\frac{1}{n}$ Dd : $\frac{1}{n}$ Bb, wo $\frac{1}{n}$ jedes vieltheilichte bedeutet.

§. 15. Anmerkung.

Da die Auflösung voriger Aufgabe allgemein ist: so wäre es unnöthig, im folgenden Unterricht die Anwendung auf alle besondere Fälle, in welchen gegebene Linien für einen Proportionalzirkel zu klein oder zu groß sind, jedesmal besonders zu lehren.



II. Von

II. Von der Linea Arithmetica.

§. 1. Erklärung, Eintheilung, und wie diese zu prüfen sey.

Die Linea arithmetica ist eine in so viel gleiche Theile eingetheilte Linie, als nöthig sind, um in solchen die Abtheilungen aller übrigen ihr gleichen Linien bequem anzugeben. Sie heißt daher auch Linea Partium aequalium, oder die Fundamentallinie. Ohnerachtet sie also jede willkührliche angenommene Menge von Theilen bekommen könnte: so erwählet man lieber eine gerade Hauptzahl, gemeiniglich 200, 1) weil dadurch ihre Eintheilung erleichtert wird, 2) weil sich auf den gewöhnlichen Proportionalzirkeln von ½ Fuß solche kleine Theile noch deutlich angeben und unterscheiden lassen, und 3) weil sie auf solche Art den doppelten Halbmesser oder den Durchmesser für solche Sinustafeln vorstellt, in welchen der Halbmesser oder Sinus totus 100 Theile hat. Mithin ist klar, wie die Eintheilung dieser Linie zu prüfen sey. Man nehme mit dem Handzirkel eine beliebige Weite von etlichen Theilen, z. E. von 15 Theilen, und stelle den einen Fuß z. E. in den Punkt 7: so muß der andere in den Punkt 22 treffen u. s. w.

§. 2. Vortheile bey ihrer Eintheilung.

I. Durch ein dreymal nach einander fortgesetztes Halbiren erhält man erstlich ihre Hälfte von 100 Theilen, hernach jedes Viertel von 50 Theilen, und dann jedes Achtel von 25 Theilen. Jedes Achtel in 5 Theile getheilt, giebt jedes Vierzigtheil von 5 Theilen, und endlich giebt jedes Vierzigtheil in 5 Theile getheilt, alle einzelne 200 Theile.

II. Verfertiget einen verjüngten tausendtheilichten Maaßstab für eine Linie von gleicher Länge mit der Linea arithmetica; so sind $\frac{5}{1000}$ dieses Maaßstabes $\frac{1}{200}$ der Lineae arithmeticae. Traget also nach und nach auf die Lin. arithm. die Theile des Maaßstabes in folgender Ordnung ab, wie dieser Anfang einer leicht vollständig zu berechnenden Tafel weiset:

Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.	Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.	Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.
200	1000	190	950	180	900
199	995	189	945	179	895
198	990	188	940	178	890
197	985	187	935	177	885
196	980	186	930	176	880
195	975	185	925	175	875
194	970	184	920	174	870
193	965	183	915	173	865
192	960	182	910	172	860
191	955	181	905	171	855

war, was noch verbessert werden konnte, auch hinerinnen alle übertroffen, und in dieser Schrift S. 44-61 vom Proportionalzirkel nicht allein gehandelt, wie er ist, sondern auch, wie er zu perspectivischen Zeichnungen nützlich eingerichtet werden könne. Nach diesem Vorschlage verfertigte ihn Herr **Brander**, und **Lambert** beschrieb ihn in folgender Schrift:

(*) Kurzgefaßte Regeln zu perspectivischen Zeichnungen, vermittelst eines zu deren Ausübung so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportional-Zirkels durch **J. H. Lambert**. Augsb. 1768. In Octav. 2 Bog. 2 K. t.

Auf der 1 K. t. sind beyde Seiten eines solchen Proportionalzirkels sehr gut abgebildet. Auf der einen sind 5 Perspectivlinien, auf der andern die Linea arithmetica von 400 Theilen, Linea Tang. sec. sinuum und eine Linea elliptica. Diese letzte Linie ist von ausnehmend großem Nutzen bey astronomischen Zeichnungen; und da man gar füglich auf den gewöhnlichen Proportionalzirkeln der übrigen Linien entbehren kann: so halte ich dafür, daß **Lambert** dieses Werkzeug mehr, als alle andere Schriftsteller, nutzbar gemacht habe.

(*) **Lamberts** freye Perspective, zweyter Theil. Zürich 1774.

In diesem wird von der angezeigten Verbesserung des Proportionalzirkels Nachricht ertheilet S. 104. 105.

(*) Herr Hofr. **Karstens** Lehrbegrif der gesamten Mathematik. Der VIIde Theil. Die Optik und Perspectiv. Greifswald 1775. Octav.

In diesem vollständigsten Lehrbegriff der Perspectiv wird also auch S. 175-185 vom Gebrauch des Proportionalzirkels gehandelt.

21. Die neueste Beurtheilung und Anwendung dieses Werkzeuges.

(*) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie, entworfen von M. **Johann Tobias Mayer**. I Theil. Göttingen 1777, in Octav.

In diesem unentbehrlichen Werke, dessen glücklichen Vollendung jeder Verehrer der Mathematik entgegen siehet, hat der Herr Professor S. 260-268 das wichtigste von dem Gebrauch des Proportionalzirkels in Beziehung auf die Geometrie mitgenommen und von den dahingehörigen Schriften Nachricht ertheilt, in welcher sich vielleicht einiges aus dieser ergänzen und berichtigen läßt. Das Urtheil von dessen Gebrauch S. 266 ist so beschaffen, daß dadurch nicht ganz seine Empfelung überflüßig wird.

(*) Beschreibung und Gebrauch eines geometrischen Instruments in Gestalt eines Proportionalzirkels — von **Ge. Fr. Brander**. Augsb. 1780. Octav. 4 Bog. 2 K. t.

Auch zwey Schenkel mit Linien auf beyden Seiten, nebst einem Chordenlineal, ohngefehr wie **Barnikels** Polygraphometrum §. 19.

22. Dop-

22. Doppelter Anhang von Schriftstellern.

I. Beym LIPENIO T. I p. 297 wird: *Nic. Forest*, Rhemensis Gallus, de Circino Proportionis. Rhemis, ohne Anzeige des Orts, Jahres und Formats, und vom Leupold S. 121: *Sethi Partridge* Descriptio Instrumenti, quod vulgo dicitur duplex Scala Proportionis, Anglice, Lond. 8 ohne Jahrzahl, angeführet.

II. Leupold führt in seinem Verzeichnis noch folgende vier Schriftsteller an, von welchen die Schriften der drey letzten im Catal. Bibl. Bodl. T. I p. 248. 343. T. II p. 140 vorkommen, nehmlich 1) *Dolz* Cunabula omnium fere scientiarum et praecipue in Proportionibus et Proportionalibus. Montalbani 1518. 2) *Joh. Fernelius* de Proportionibus. Paris. 1528. Fol. 3) *Nic. Horen* Tractatus Proportionum. Venet. 1505. 4) *Alb. de Saxonia* Tractatus Proportionum. Venet. 1519. 4. Obwohl in diesen Schriften etwa eine ältere Spur von diesem oder einem ähnlichen Werkzeuge vorkommen möchte?

Alphabetisches Nahmenverzeichnis.



I. Vom Proportionalzirkel überhaupt.

§. 1. Erklärung.

Der Proportionalzirkel ist ein Werkzeug *), welches aus zwey gleichen und ähnlichen Linealen bestehet, die wie beyde Füße eines Zirkels beweglich sind. Auf ihnen sind verschiedene Paare eingetheilter Linien aufgetragen, vermittelst welcher eine gerade Linie gefunden werden kann, die zu einer gegebenen Linie in gleicher Verhältnis mit zwey Abtheilungen einer solchen eingetheilten Linie stehet **).

*) Oder besser mit Goldmann, ein Kunstzeug. Wer aber mit solchen Kunstzeugen nur handwerksmäßig umzugehen weiß, dem sind sie Werkzeuge.

**) Z. E. wenn die Seite eines gleichseitigen Dreyecks gegeben ist, und man die Seite eines ihm gleichen ordentlichen Fünfecks finden will: so stehen auf der einen Seite des Proportionalzirkels zwey gleiche Linien, auf deren jeder die Seiten eines gleichseitigen Dreyecks und des ihm gleichen ordentlichen Fünfecks nach einer willkührlich angenommenen Einheit aufgetragen sind.

§. 2. Materie.

Gemeiniglich wird er aus Messing verfertigt; von Kupfer ist er nicht gewöhnlich. Mathematische Werkzeuge aus Silber schmutzen zu sehr, außer, wenn sie vergoldet werden. Helfenbeinerne werfen sich zu leicht. Allenfalls kann er aus einem festen Holze, z. E. aus Ebenholz, mit weiß eingelassenen Linien und Zahlen verfertigt werden, dergleichen Maaßstäbe nicht ungewöhnlich sind. Man nimmt auch zuweilen ein wenig härteres Holz dazu, und leimet die in Kupfer gestochne Linien darauf, welches zwar nicht viel genaues geben, doch aber ein wohlfeiles Modell vorstellen kann. Uebrigens werden auf dem Metall die eingelassenen Linien und Zahlen mit Buchdruckerschwärze kenntlich gemacht; an deren Statt von einigen Zinnober genommen wird, welches ein gutes Ansehen giebt.

§. 3. Uebliche Gestalt.

Daß beyde Füße eines Proportionalzirkels aus zwey gleichen und ähnlichen rechtwinklichten Linealen bestehen, ist an sich gar nicht nothwendig. Denn wenn, wie Tab. II Fig. 3 zeiget, und sich aus dem folgenden ergeben wird, auf beyden noch so verschiedentlich gestalteten Füßen, welche nur 1) sich um einen Stift A drehen lassen, und 2) wo die Oberfläche eines jeden für sich eben ist, zwey gleiche und nach gegebenen Verhältnissen auf gleiche Art eingetheilte Linien AB, AC aufgetragen sind, die in A zusammentreffen, und so zu einer gegebenen Linie BC eine gesucht wird, die sich wie AB: AD oder wie AC: AE verhalte: so ist, weil jeder geradlinichter Winkel ein ebener ist, und also die Dreyecke ABC, ADE in einerley Ebene liegen, ohne alle Rücksicht auf die Gestalt der Füße AB : AD = BC : DE. Weil man ihn aber 1) für jede gegebene BC, sie sey sehr groß oder klein, bequem brauchen, 2) durch überflüßige

überflüßige Zierrathen, wenn sie auch nach dem neuesten Geschmack wären, nicht zu schwer machen darf, vornehmlich aber 3) die richtige Verbindung beyder Füße und der bequeme Gebrauch auf dem Reißbret nothwendig machen, daß auf jeder Seite beyde Oberflächen der Füße zu einerley Ebene gehören: so kommt keine bessere und schicklichere Gestalt heraus, als die angezeigte ist. Man läßt es also geschehen, daß bloß an dem untern Theile beyder Lineale, wo man sie anfaßt, einige kleine Zierrathen angebracht werden.

§. 4. Das Gewinde.

Dieses ist dem Gewinde eines jeden Hand- oder Reißzirkels ähnlich. Es werden zwey kleine gleiche Scheiben an den einen Fuß und eine eben so große an den andern Fuß gelöthet. Durch alle drey gehet ein Stift von gehärtetem Stahle, dessen Mittelpunkt auf jeder Seite die gemeinschaftliche Spitze aller Winkel ist, welche die Paare gleichnahmiger Linien auf einerley Seite einschließen. Es muß sich also der Proportionalzirkel bis an diesen Stift öffnen lassen, und die Einrichtung des Gewindes in Bions Mathem. Werkschule S. 29 f. ist der Leupoldischen im Theatr. Arithm. Geom. §. 176 Tab. XVII Fig. I-IV und unten auf Tab. XVIII vorzuziehen.

§. 5. Ein anderes sehr gutes Gewinde.

Ich besitze einen großen messingenen Proportionalzirkel, welcher sehr sauber und genau von *Johann Eggerich Frersz* zu Leyden verfertigt worden. Nach Pariser Maaß ist er 13 Zoll lang, jedes Lineal $1\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{5}$ Zoll dicke, also ziemlich schwer. Sein schönes Gewinde verdienet hier beschrieben zu werden, weil im Bion dergleichen nicht vorkommt, auch solches von einem andern beym Leupold §. 177 Tab. XVII Fig. VI abweichet, beyde Bücher aber die Handbücher Deutscher Künstler sind. Ich habe es Tab. II Fig. 4 nach beygefügtem Maaßstabe genau abgezeichnet. An dem einen Fuße sind die Scheiben A, B in einer Weite von $\frac{8}{10}$ Lin. parallel befestiget. Jede ist $\frac{6}{10}$ Lin. dicke. An dem andern Fuße ist die Scheibe C von $\frac{8}{10}$ Lin. Dicke, befestiget, die also zwischen A und B genau einpaßt. Angelöthet sind diese Scheiben an beyden Füßen nicht; wie sie aber daran befestigt sind, das habe ich, ohne vielleicht das Werkzeug zu verderben, nicht untersuchen wollen. So viel siehet man, daß dazu an jedem Fuße zwey starke stählerne Schrauben dienen, deren Köpfe auf seiner äußeren Schärfe in M und N eingelassen sind. OM ist 1 Zoll, MN 10 Linien. Die Befestigung beyder Füße geschiehet vermittelst einer kleinen Scheibe D, welche so dick ist, als B und C zusammengenommen, also $1\frac{4}{10}$ Lin. Diese Scheibe D paßt aufs genaueste in die Hölungen der Scheiben B und C, und ist vermittelst etlicher Schrauben an A befestiget. Der stählerne Stift, der D mit A verbindet, gehet durch aller Scheiben Mittelpunkte. Die Halbmesser sind FE 1 Zoll $2\frac{1}{2}$ Lin. FI $10\frac{1}{2}$ Lin. FG $7\frac{1}{2}$ Lin. FH 2 Lin. des Stifts $\frac{1}{2}$ Lin. Uebrigens hält dieser Proportionalzirkel alle folgende Proben aus.

§. 6. Wie ein Proportionalzirkel zu prüfen sey.

I. Die Oberflächen beyder Füße müssen in einerley Ebene liegen, das Werkzeug mag geöffnet seyn, oder nicht.

II. Weil man beyde Füße rechteckicht zu machen pfleget, ob es gleich nicht nothwendig ist, §. 3: so muß unter dieser Bedingung der ganz geöffnete Proportionalzirkel ein Lineal vorstellen. Ist dieses, so werden auch

III. beyde innere Schärfen genau auf einander passen, wenn beyde Füße zusammen gedrückt werden, ohne sich im geringsten von selbst aus einander zu rücken, welches auch die Güte des Gewindes anzeiget; und diese Schärfen werden diejenige Linie vorstellen, welche jeden Winkel halbiret, den zwey gleichnahmige Linien einschließen.

IV. Wenn man mit einem Handzirkel vom Mittelpuncte aus auf einer gewissen Linie eine beliebige Weite nimmt, und nur den Proportionalzirkel willkührlich öffnet: so muß auf ihr und der andern gleichnahmigen Linie die vorige Länge gefunden werden, wenn der Stift gut befestiget ist.

V. Eröffnet man das Werkzeug oder beuget beyde Füße aus einander, wobey man aber behutsam verfahren muß: so muß solches weder zu stramm noch zu locker angehen. Die Schrauben an dem §. 5 beschriebenen Gewinde für die Scheibe D, dienen vorzüglich zum Nachhelfen, wie bey Hand- und Reißzirkeln geschiehet, welche verschraubte Köpfe haben. Bey den gewöhnlichen Gewinden pflegt schon der Künstler zuweilen mit Wachs nachzuhelfen.

VI. Die Theilungspunkte müssen mitten in jeder Linie so fein, als möglich, aber doch so tief mit einem runden Stahl eingeschlagen seyn, daß die eingesetzten Spitzen des Handzirkels nicht leicht ausweichen können, wodurch auch nur das Werkzeug verdorben würde. Wie aber die Eintheilung der Linien zu prüfen sey, wird bey dem Unterricht von jeder gelehret werden.

> **Goldmann** behauptet S. 2, daß ein guter Proportionalzirkel unter den mathematischen Kunstzeugen ein Meisterstück sey, aus dem man einen rechtschaffenen Meister kenne. Vom Gewinde kann man es zugeben. Allein die Eintheilung ist nicht so gar schwer zu erhalten, wenn man nur einen guten verjüngten Maaßstab hat, und mit erforderlicher Geduld verfähret. Hierüber verdienet Herrn Prof. **Mayers** practische Geometrie I Th. S. 283 f. nachgelesen zu werden.

§. 7. Größe.

Weil, wie sich im folgenden ergeben wird, die Abtheilungen aller Linien des Proportionalzirkels auf der Arithmetischen beruhen, welcher man 200 Theile zu geben pfleget: so kann er überhaupt jede Länge haben, bey welcher sich die Arithmetische Linie in noch so merkliche Theile eintheilen läßt, von deren jedem sich wenigstens noch die Hälfte mit dem Augenmaaß angeben

angeben läßt. Dieses aber gehet bey der gewöhnlichsten Länge von ½ Pariser Fuß noch an; man macht ihn aber öfters etwas größer. Eine Länge von 13 Zollen, wie der §. 5 beschriebene hat, giebt dem Werkzeuge zwar ein gutes Ansehen, und man kann ohne große Kunst von jedem 200sten Theile der Arithmetischen Linie noch die Zehntheile darauf angeben: allein seine Schwere macht ihn unbequem, und eine solche Größe viel zu kostbar, als daß ein solcher Aufwand nothwendig würde.

§. 8. Gewöhnliche Anzahl und Benennung der darauf befindlichen Linien.

Auf jeder Seite, wie Tab. I Fig. 1 zeigt, sind 6 Paar Linien gezeichnet, von welchen aber nur ein Paar im Mittelpunkte des Stifts zusammentrifft, weil solches bey den übrigen theils unnöthig ist, theils ohne Verwirrung bey so spitzigen Winkeln nicht angehet. Außer diesen 12 Linien werden zur Seite noch so viele Linien angebracht, als schicklicher Platz da ist oder für gut befunden wird. Diese 12 Linien sind

I. auf der einen Seite (in der Figur zur linken Hand)

1. Arithmetica
2. Geometrica
3. Tetragonica
4. Subtensarum Angulorum Polygonorum
5. Reducendorum Planorum et Corporum regularium
6. Corporum Sphaerae inscribendorum

Linea Tangentium.

II. Auf der andern Seite (in der Figur zur rechten Hand)

1. Cubica
2. Chordarum
3. Circuli diuidendi
4. Rectae extrema ac media ratione diuidendae
5. Fortificatoria
6. Metallica

♃ ♄ ♂.

§. 9. Von anderen Linien, die sich auf dem Proportionalzirkel auftragen lassen.

Für alle Fälle, wo man eine mittlere, dritte oder vierte Proportionalgröße aus gegebenen finden, und diese in Zahlen oder Linien ausdrücken, angeben oder darstellen kann (exponere), lassen sich auch die dahin gehörigen Linien auftragen; woraus aber bey so viel Linien und Zahlen leicht eine Verwechselung entstehen dürfte. Die §. 8 angezeigten Linien sind die gewöhnlichsten.

Man

Man hat besondere Proportionalzirkel für Ingenieurs und Artilleristen, worauf sich bloß 1) Linea Fortificatoria 2) Operum externorum 3) Operum campestrium und 4) Mortarium dirigens befinden. Allein ihr Gebrauch fällt heut zu Tage völlig weg, wie sich unten bey dem Unterricht von der Linea fortificatoria ergeben wird. Was für Linien, außer den gewöhnlichen, von andern vorgeschlagen worden, ist in der historischen Einleitung angezeigt worden, worunter **Lamberts** Einrichtung ohnstreitig den Vorzug verdienet.

§. 10. Nöthiger Handzirkel.

Der Gebrauch des Proportionalzirkels erfordert einen guten Handzirkel von 5 bis 6 Zollen. Bey einem großen Proportionalzirkel muß man den Stangenzirkel zu Hülfe nehmen. Die größte Weite, die auf ihm genommen werden kann, ist allemal kleiner, als die doppelte Länge einer seiner Linien. Denn weil bey völliger Oeffnung des Proportionalzirkels jedes Paar gleichnahmiger Linien einen stumpfen Winkel macht: so ist die Weite ihrer beyden Endpunkte die dritte Seite eines gleichschenklichten Dreyecks, welche nothwendig kleiner ist, als beyde übrigen Seiten zusammengenommen, oder als die doppelte Länge einer solchen Linie. Nach der Zeichnung Tab. I Fig. 1 ist jede Linie 5 Zoll, $5\frac{1}{4}$ Lin. Paris. lang, wozu also ein 6 Zoll langer Handzirkel gehöret, um die größte Weite sicher zu fassen. Auf dem §. 5 beschriebenen ist jede Linie 11 Zoll $4\frac{7}{10}$ Lin. lang, wo also für die größte Weite ein Handzirkel von 1 Fuß gehörte, an dessen Statt ein Stangenzirkel von 2 Fuß genommen werden muß.

§. 11. Auf wie vielerley Art die Weiten auf dem Proportionalzirkel genommen werden.

Eine Weite oder Linie wird auf einem Proportionalzirkel mit einem Hand- oder Stangenzirkel genommen

I. *Directe*, gerade, nach der **Länge**, wenn man den einen Fuß des Zirkels in den Mittelpunkt des Stifts, den andern aber in einen Theilungspunkt einer gegebenen Linie setzt, der Proportionalzirkel mag ungeöffnet oder geöffnet seyn.

II. *Transuersim*, überzwerch, nach der **Breite**, wenn man bey geöffnetem Werkzeuge beyde Füße des Zirkels in zwey Theilungspunkte eines Paares gleichnahmiger Linien von gleichen Zahlen stellet. Solches geschiehet entweder, wenn man das Werkzeug bis auf eine gegebene Weite öffnet, wo sich also die Oeffnung des Proportionalzirkels nach der Oeffnung des Handzirkels richtet; oder, wenn man bey einer gegebenen Oeffnung des Proportionalzirkels eine Weite zwischen zwey Punkten von gegebenen gleichen Zahlen nimmt, mithin die Oeffnung des Handzirkels durch die Oeffnung des Proportionalzirkels bestimmt wird.

Um den Vortrag abzukürzen, wird hier ein für allemal angemerkt, daß z. E. eine **Linie überzwerch zwischen 50 stellen**, so viel anzeige, als eine Linie überzwerch oder transuersim zwischen 50 **und** 50 stellen, d. i. zwischen beyde Punkte gleichnahmiger Linien, bey welchen die Zahl 50 stehet.

III. *Obli-*

III. *Oblique*, schief, wenn man den Handzirkel zwischen zwey Theilungspunkte gleichnahmiger Linien von ungleichen Zahlen stellet.

IV. *Tentando*, versuchend, wenn man bey gegebener Oeffnung des Proportionalzirkels diejenigen zwey Theilungspunkte von gleichen Zahlen suchet, zwischen welchen sich der Handzirkel mit seiner gegebenen Oeffnung oder Weite stellen läßt.

§. 12. Theorie des Proportionalzirkels.

I. Wenn in einem geradlinichten Dreyeck ABC (Tab. II Fig. 5) mit dessen einer Seite BC eine Parallellinie DE gezogen wird: so werden beyde übrige Seiten AB, AC von einer solchen Parallellinie in proportionirte Stücke getheilt, oder es ist

$AD:DB = AE:EC$ Euclid. VI B. 2 S.

II. Es ist aber auch $AD + DB:AD = AE + EC:AE$, V B. 12 S.
d. i. $AB:AD = AC:AE$, I B. 13 Allgem. Satz.
mithin $AD:AB = AE:AC$, V B. 4 S.

III. Weil beyde Dreyecke ABC, ADE einen gemeinschaftlichen Winkel A haben: so ist zugleich $AD:DE = AB:BC$, VI B. 6 S.
Demnach $AD:AB = DE:BC$, V B. 16 S.
Allein es war $AD:AB = AE:AC$, nach N. II.
Folglich $DE:BC = AD:AB = AE:AC$, V B. 11 S.

§. 13. Allgemeine Anwendung derselben.

Auf dem Proportionalzirkel schließen (Tab. II Fig. 6) jede zwey gleichnahmige Linien AM, AN einen Winkel MAN ein, dessen Größe von einer überzwerch gestellten Linie DE oder BC abhänget. Es ist aber allemal, wenn eine Linie überzwerch genommen wird, $AD = AE$, oder $AB = AC$ §. 11 N. III. Demnach $AD:AB = AE:AC$ Euclid. V B. 7 S. Wenn also für eine gegebene Weite DE die eine Spitze des Handzirkels in D auf der einen Linie AM gestellt wird, und die andere in E auf der gleichnahmigen Linie AN, und so bey unverrückter Oeffnung für die gesuchte Linie die eine Spitze des Handzirkels in B auch auf AM, die andere aber in C auf AN gestellt, d. h. DE, BC überzwerch genommen werden: so ist, weil wegen unverrückter Oeffnung die Dreyecke DAE, BAC den gemeinschaftlichen Winkel BAC haben, und, wie erwiesen worden, $AD:AB = AE:AC$ ist, auch $AD:AB = DE:BC$ §. 12 N. III. Da nun AD, AB nach einem bestimmten Maaß gegeben sind: so wird zu der nach eben demselben oder einem jeden andern Maaß gegebenen Linie DE eine andre BC von eben diesem Maaße gefunden, die sich zu DE verhält, wie $BA:DA$, oder $CA:EA$. Eben dieses gilt, wenn BC gegeben und DE gefunden wird. Wenn also $DE = AD = AE$ ist: so ist auch $BC = AB = AC$, und ADE, ABC sind gleichseitige Dreyecke. Ist $AB = DE$: so hat man $AD:AB = AB:BC$, und also ist BC die dritte Proportionallinie zu AD, AB. Aber auf diese Art läßt sich nicht die mittlere Proportionallinie zu zwey gegebenen fin-

 den,

y^2	a × b	y	z	x
2209	2209. 1	47	1105	1104
2304	1152. 2	48	577	575
	576. 4	48	290	286
	384. 6	48	195	189
	288. 8	48	148	140
	192. 12	48	102	90
	144. 16	48	80	64
	128. 18	48	73	55
	96. 24	48	60	36
	72. 32	48	52	20
	64. 36	48	50	14
2401	2401. 1	49	1201	1200
	343. 7	49	175	168
2500	1250. 2	50	626	624
	250. 10	50	130	120
2601	2601. 1	51	1301	1300
	867. 3	51	435	432
	289. 9	51	149	140
	153. 17	51	85	68
2704	1352. 2	52	677	675
	676. 4	52	340	336
	338. 8	52	173	165
	104. 26	52	65	39
2809	2809. 1	53	1405	1404
2916	1458. 2	54	730	728
	486. 6	54	246	240
	162. 18	54	90	72
3025	3025. 1	55	1513	1512

y^2	a × b	y	z	x
	605. 5	55	305	300
	275. 11	55	143	132
	121. 25	55	73	48
3136	1568. 2	56	784	783
	784. 4	56	394	39[illegible]
	392. 8	56	200	192
	224. 14	56	119	105
	196. 16	56	106	90
	112. 28	56	70	42
	98. 32	56	65	33
3249	3249. 1	57	1625	1624
	1083. 3	57	543	540
	361. 9	57	185	176
	171. 19	57	95	76
3364	1682. 2	58	842	840
3481	3481. 1	59	1741	1740
3600	1800. 2	60	901	899
	900. 4	60	452	448
	600. 6	60	303	297
	450. 8	60	229	221
	360. 10	60	185	175
	300. 12	60	156	144
	200. 18	60	109	91
	180. 20	60	100	80
	150. 24	60	87	63
	120. 30	60	75	45
	100. 36	60	68	32
	72. 50	60	61	11

§. 17. Anwendung dieser Tafel.

Man schneide Tab. II Fig. 17 aus A ein Stücke AC nach Belieben ab, und suche in der Tafel drey Zahlen neben einander in den Spalten auf, worüber y, z, x stehet, doch so, daß z nicht größer, als 200 sey: so gehören die Zahlen y, x für die Schenkel des rechten Winkels AC, AD und z für die Hypotenuse CD, welche man, wie §. 14 gelehrt worden, ziehet. Daß die Tafel nicht nach der Reihe der natürlichen Zahlen für z geordnet und eingerichtet worden, sondern für y, oder x, welches völlig einerley ist, dieses ist deswegen geschehen, weil man in der Zeichnung mit einer Seite des Dreyecks, die den rechten Winkel einschließt, den Anfang machet. Hätte man aus z die übrigen beyden Zahlen nach einer andern Algebrai-

schen

II. Von der Linea Arithmetica.

§. 1. Erklärung, Eintheilung, und wie diese zu prüfen sey.

Die Linea arithmetica ist eine in so viel gleiche Theile eingetheilte Linie, als nöthig sind, um in solchen die Abtheilungen aller übrigen ihr gleichen Linien bequem anzugeben. Sie heißt daher auch Linea Partium aequalium, oder die Fundamentallinie. Ohnerachtet sie also jede willkührliche angenommene Menge von Theilen bekommen könnte: so erwählet man lieber eine gerade Hauptzahl, gemeiniglich 200, 1) weil dadurch ihre Eintheilung erleichtert wird, 2) weil sich auf den gewöhnlichen Proportionalzirkeln von ½ Fuß solche kleine Theile noch deutlich angeben und unterscheiden lassen, und 3) weil sie auf solche Art den doppelten Halbmesser oder den Durchmesser für solche Sinustafeln vorstellt, in welchen der Halbmesser oder Sinus totus 100 Theile hat. Mithin ist klar, wie die Eintheilung dieser Linie zu prüfen sey. Man nehme mit dem Handzirkel eine beliebige Weite von etlichen Theilen, z. E. von 15 Theilen, und stelle den einen Fuß z. E. in den Punkt 7: so muß der andere in den Punkt 22 treffen u. s. w.

§. 2. Vortheile bey ihrer Eintheilung.

I. Durch ein dreymal nach einander fortgesetztes Halbiren erhält man erstlich ihre Hälfte von 100 Theilen, hernach jedes Viertel von 50 Theilen, und dann jedes Achtel von 25 Theilen. Jedes Achtel in 5 Theile getheilt, giebt jedes Vierzigtheil von 5 Theilen, und endlich giebt jedes Vierzigtheil in 5 Theile getheilt, alle einzelne 200 Theile.

II. Verfertiget einen verjüngten tausendtheilichten Maaßstab für eine Linie von gleicher Länge mit der Linea arithmetica; so sind $\frac{1}{1000}$ dieses Maaßstabes $\frac{1}{200}$ der Lineae arithmeticae. Traget also nach und nach auf die Lin. arithm. die Theile des Maaßstabes in folgender Ordnung ab, wie dieser Anfang einer leicht vollständig zu berechnenden Tafel weiset:

Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.	Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.	Theile der Lin. ar.	Theile des Maaßst.
200	1000	190	950	180	900
199	995	189	945	179	895
198	990	188	940	178	890
197	985	187	935	177	885
196	980	186	930	176	880
195	975	185	925	175	875
194	970	184	920	174	870
193	965	183	915	173	865
192	960	182	910	172	860
191	955	181	905	171	855

Es ist nehmlich bey solchen Eintheilungen der Fortgang von grösseren Abtheilungen zu kleineren, wo man die Weite des Handzirkels nach und nach kleiner macht, weit sicherer, als wenn man nach und nach den Handzirkel für grössere Weiten mehr eröffnet, und so von dem Maaßstabe 5, 10, 15, 20 ꝛc. Theile abträget; indem die Erfahrung lehret, daß die Weite eines Handzirkels ohngleich genauer um eine Kleinigkeit vermindert, als vergrößert werden kann. Haar- oder Federzirkel, die sich mit Schrauben stellen lassen, leisten bey jeder sorgfältigen Eintheilung einer Linie, sonderlich in kleine Theile, die besten Dienste.

§. 3. Maaßstab zur Eintheilung der übrigen Linien des Proportionalzirkels.

Mit Hülfe eines solchen verjüngten Maaßstabes, wie Tab. I Fig. 2 die obere Eintheilung zeiget, lassen sich die Abtheilungen aller übrigen Linien des Proportionalzirkels bis auf ihre Tausendtheile auftragen. Man verlanget aber bey dergleichen Eintheilung in den meisten Fällen noch kleinere Theile. Weil man nun der Lineae arithm. oder Fundamentallinie 200 Theile zu geben pfleget: so gehe man bis auf deren Zehntheile, und verfertige, wie Tab. I Fig. 2 aus der unteren Eintheilung zu sehen, für die Fundamentallinie einen zweytausendtheilichten Maaßstab, dergleichen sich mit erforderlicher Deutlichkeit zeichnen, und von welchem sich die berechneten Abtheilungen der übrigen Linien am besten und sichersten, nach dem im vorigen §. N. II empfolnen Verfahren, auf sie abtragen lassen.

§. 4. Eigentlicher Gebrauch der Lineae arithmeticae.

Da die Einrichtung des Proportionalzirkels an sich ganz geometrisch ist: so kann man den Gebrauch der Lineae arithm. zum eigentlichen Rechnen, oder zu arithmetischen Auflösungen mathematischer Aufgaben, schwerlich im Ernst empfelen, wie es doch die meisten Schriftsteller gethan haben. Weil aber jede Zahl in einer geraden Linie ausgedruckt oder dargestellt werden kann I. 9, indem sich die Einheit zu jeder Zahl verhält, wie ein gegebenes Längenmaaß als die Einheit zu einer eben so vielmal langen Linie; oder jede Zahl so oft die Einheit enthält, als oft das Maaß in der Linie enthalten ist *); so kann man allerdings mit Hülfe des Proportionalzirkels rechnen; bey welchem Verfahren man aber keine Zeit gewinnt. Um also arithmetische Auflösungen nicht mit geometrischen zu vermengen: so soll vornehmlich gelehret werden, wie letztere durch den Gerauch des Proportionalzirkels erleichtert werden; doch ohne die ersteren in besondern Fällen gänzlich zu übergehen.

*) Z. E. 12 Zolle. Dieser Ausdruck will eigentlich so viel sagen: eine Linie a ist 12 d gleich, wo d einen Zoll bedeutet. Allein die Gleichung $a = 12\ d$ oder genauer $1 \times a = 12 \times d$ giebt die Proportion $1 : 12 = d : a$, d. h. so oft als die Eins in der Zahl Zwölf enthalten ist, so oft ist auch die Länge eines Zolles in der Länge der Linie a enthalten.

§. 5. 1 Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie um ein bestimmtes Stücke zu verlängern.

Auflösung. I Fall. Wenn die Linie gemessen ist: Es sey z. E. Tab. II. Lin. ar. Fig. I. AB nach einem gewissen Maaßstabe 20 Fuß, man soll sie von B aus um 12 F. verlängern.

längern. Da also die verlängerte 20 + 12 = 32 F. betragen soll; so stellet AB überzwerch zwischen 20, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 32, welche die grössere AC von 32 F. ist. Oder nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 12, welche das Stücke BC von 12 F. ist.

II Fall. Wenn die Linie nicht gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 2 die Linie DE um $\frac{1}{4}$ von E aus zu verlängern, oder es soll seyn DE : DF = 1 : $\frac{5}{4}$ = 4 : 5. Weil nun 4 : 5 = 40 : 50, so stellet DE überzwerch zwischen 40, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 50: so ist die ihr gleiche DF = $\frac{5}{4}$ DE oder EF = $\frac{1}{4}$ DE. Oder nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 10: so ist die ihr gleiche EF das verlangte Stück.

Man kann allerdings mit Hülfe der Lin. ar. des Proportionalzirkels Zahlen addiren, z. E. 36 und 27, indem man auf ihr nach der Länge 27 nimmt, und den einen Fuß des Handzirkels in 36 stellet: so trifft der andere in 63; oder nach der Länge 36 nimmt, und den einen Fuß in 27 stellet: so trifft der andere auch in 63. Aber wer wird so addiren? Und wie solche Zahlen, deren Summe mehr als 200 beträgt? Eben dieses gilt auch vom Subtrahiren und andern Rechnungsarten.

§. 6. 2 Aufgabe: Eine gegebene Linie um ein bestimmtes Stück abzukürzen.

Auflösung. I Fall. Wenn die Linie gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 3, GH = 54 Zoll, man soll sie von H aus um 36 Zoll abkürzen. Stellet also GH überzwerch zwischen 54, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 36; traget diese von H nach I: so ist IG der Rest von 18 Zollen.

II Fall. Wenn die Linie nicht gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II. Fig. 4, KL von L aus um $\frac{2}{5}$ abzukürzen, und also soll sich LK : LM = 1 : $\frac{3}{5}$ = 5 : 3 verhalten. Da nun 5 : 3 = 50 : 30, so stellet LK zwischen 50 überzwerch, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 30, welche von L nach M abzutragen ist. Mithin ist der Rest KM = $\frac{2}{5}$ KL.

Daß man beydemal im IIten Falle voriger Auflösungen den Handzirkel anstatt zwischen 4, 5 und 5, 3 überzwerch zwischen 40, 50 und 50, 30 stellen kann, weil jene Weiten viel zu klein wären, beruhet auf dem, was I. §. 14 erwiesen worden, und kommt im folgenden aus dieser Ursache sehr oft vor.

§. 7. 3 Aufgabe: Einer gegebenen Linie Vielfaches zu finden.

Auflösung. I. Wenn die Linie gemessen ist, und z. E. Tab. II Fig. 5, NO = 25 Zoll ist. Man suchet ihre 6fache Länge, also eine Linie von 150 Zoll. Stellet daher NO zwischen 25 überzwerch, und nehmet unverrückt auch überzerch die Weite zwischen 150; so ist die ihr gleiche PQ = 6 × NO. Eben so verfahret, wenn die gegebene Linie nicht gemessen ist. Stel-

let sie nehmlich überzwerch zwischen eine Zahl, deren gegebenes Vielfaches kleiner als 200 ist: und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen der gegebenen vielfachen Zahl. Stellet z. E. NO zwischen 30, und nehmet alsdenn die Weite zwischen 180 = 6 × 30.

II. Wäre das Vielfache nicht in einer ganzen Zahl gegeben, sondern ein Vielfaches und zugleich Vieltheilichtes, oder, wenn die Verhältnis der gesuchten Linie zur gegebenen multiplex Superparticularis oder Superpartiens wäre: so verfahret also, z. E. man soll aus einem gegebenen Stücke eines Maaßstabes seine ganze Länge finden. Es sey daher Tab. II Fig. 6, RS = $3\frac{1}{2}$ Zoll, wie lang ist der dazu gehörige Fuß von 12 Zollen? Da also $3\frac{1}{2} : 12 = 7 : 24 = 35 : 120$ ist: so stellet RS überzwerch zwischen 35, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 120: so ist die ihr gleiche TV der gesuchte Fuß.

§. 8. 4 Aufgabe: Eine gegebene Linie in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. I Fall. Wenn die Linie gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 7, WX = 72 Zoll, man soll sie in 8 Theile theilen. Stellet also WX überzwerch zwischen 72, und nehmet unverrückt auch überzwerch nach und nach, vermöge dem §. 2. II empfolnen Verfahren, die Weiten zwischen 63, 54, 45, 36, 27, 18, 9, und traget diese von W aus ab: so ergeben sich die einzelen Theile von 9 Zollen. Ließe sich WX nicht zwischen 72 überzwerch stellen, sondern wäre in dem einen Fall für das Werkzeug zu groß: so stellet sie zwischen eine Zahl überzwerch, die größer als 72 ist, aber mit 8 sich dividiren läßt, z. E. 160, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 140, 120, 100, 80, 60, 40, 20. Wäre sie in dem andern Fall zu klein, um sie zwischen 72 zu stellen: so wird es zwischen 64, oder 56, oder 48 rc. überhaupt zwischen Zahlen angehen, die sich mit 8 dividiren lassen *).

II Fall. Wenn die Linie nicht gemessen ist. Es soll z. E. Tab. II Fig. 8, YZ in 5 Theile getheilt werden. Stellet also YZ überzwerch zwischen eine Zahl, die sich mit 5 dividiren läßt, z. E. 200, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 160, 120, 80, 40.

*) Ein solches Exempel, wie wenn eine Linie von 15 Fuß zwölftheilichtes Maaßes in 12 Theile zu theilen wäre, gehört in die populäre Arithmetik, nach welcher ein Theil 15 Zoll beträgt. Jener berechnete auf dem Papier folgendes: Eine Elle kostet 12 Gr., was kosten 24 Ellen?

§. 9. Zusätze zu dieser Aufgabe.

I. Auf diese Art erhält man, wie es einige nennen, einen Bruch einer Linie, es sey nun ein oder etliche Theile. Also z. E. in der 8 Fig. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ von YZ: wohin auch die 2te Aufgabe §. 6 gehöret.

II. Folglich kann man durch dieses Verfahren einen jeden kleinen oder verjüngten Maaßstab eintheilen. Gesetzt, es wäre die Linea arithmetica, wie Tab. I Fig. 2, in 1000 Theile zu theilen. Erstlich also in 10 Theile. Stellet die Linie überzwerch zwischen 200, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 180, 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40, 20: so geben diese Weiten die ersten 10 Theile. Um den oberen Zehntheil in 10 Theile zu theilen,

so

so nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2. Für die an ihrem Endpunkte errichtete senkrechte Linie, welche allemal von beliebiger Länge seyn kann, verfahret eben so, indem ihr sie zwischen ein Vielfaches der 10 stellt, und unverrückt auch überzwerch die Theile nach und nach nehmet. Das Verfahren für die Eintheilung in 2000 Theile ist eben so beschaffen.

§. 10. Erinnerung.

Wenn man sich auf die Güte des Proportionalzirkels verlassen kann: so verlohnet es sich wirklich der Mühe, ihn bey solchen Eintheilungen zu gebrauchen, als es auf Versuche ankommen zu lassen. Man kann sich auch bey Eintheilung einer Linie eines verjüngten Maaßstabes bedienen, dergleichen aber, besonders bey der ersten und letzten Transversallinie, die sich bey kleinen Eintheilungen sehr leicht schleifen können, selbst geübten Künstlern, nicht immer gleich gut zu gerathen pfleget. Ein geübtes Augenmaaß, Geduld und Behutsamkeit beym Gebrauch des Handzirkels in Eintheilung einer Linie oder Bogens aus freyer Hand, vertritt am besten die Stelle anderer sonst theoretisch richtiger Hülfsmittel.

§. 11. 5 Aufgabe: Eine gegebene Linie nach bestimmten ungleichen Verhältnissen einzutheilen.

Auflösung. I Fall. Wenn die Linie gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 9. AB = 150 Zoll, in drey Stücke zu theilen, die sich wie 4, 5, 6 verhalten. Weil also hier nach den Gründen der Gesellschaftsrechnung (Kästners Arithm. S. 133) $4 + 5 + 6 = 15$ genommen werden muß: so stellet AB überzwerch zwischen 15, oder wenn dieses nicht angehet, zwischen eine andere Zahl, die ein Vielfaches der 15 ist, als 30, 45, 60 ꝛc., und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 4, 5, 6, oder zwischen dem gleich Vielfachen dieser drey Zahlen, als ein Vielfaches der 15 anfänglich angenommen worden, welche drey Weiten die gesuchte Stücke von 40, 50, 60 Zollen geben. Denn so ist $4 : 40 = 5 : 50 = 6 : 60 = 15 : 150$. Eben so wäre, wenn man AB zwischen 45 überzwerch gestellt hätte, $12 : 40 = 15 : 50 = 18 : 60 = 45 : 150$.

II Fall. Eben so verfahret, wenn die Linie nicht gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 10, CD die Axe einer Säule von einer niedrigen Ordnung, deren Haupttheile nach dem Goldmann, nehmlich Postement, Untersatz, Säule und Hauptgesimse sich wie 5, 1, 16, 4 verhalten. Weil also $5 + 1 + 16 + 4 = 26$: so stellet CD überzwerch zwischen 26 oder deren Vielfaches, so weit es der Proportionalzirkel erlaubt, zwischen 52, 78, 104 ꝛc., und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 5, 1, 16, 4, oder zwischen den gleich Vielfachen dieser vier Zahlen, als ein Vielfaches der 26 anfänglich angenommen worden: so sind die gefundenen Weiten die Höhen der vier Haupttheile einer solchen Säule. Hätte man CD zwischen 104 überzwerch gestellt: so ist $5 : 20 = 1 : 4 = 16 : 64 = 4 : 16 = 26 : 104$ *).

Wären die Verhältnisse untermengt in ganzen Zahl, wahren oder uneigentlichen Brüchen gegeben: so reduciret alles auf ganze Zahlen, und verfahret, wie vorher. Wenn z. E. Tab.

Tab. II Fig. 11, EF in drey Stücke zu theilen ist, die sich wie 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$ verhalten: so geben

1	mit 4 multipliret	4
$1\frac{1}{4}$		5
$1\frac{1}{2}$		6
$3\frac{3}{4}$		15

Oder Fig. 12 sey GH in drey Stücke zu theilen, die sich wie 1, $1\frac{7}{9}$, $1\frac{3}{5}$ verhalten. Hier ist

1	so viel als	1 also mit 45 multiplicirt	45
$1\frac{7}{9}$		$\frac{16}{9}$	80
$1\frac{3}{5}$		$\frac{8}{5}$	72
			197.

*) So ergäbe sich ein Proportionalzirkel für Säulenordnungen, nachdem man nun Goldmanns, oder des Vignola, oder eines andern Eintheilungen und Verhältnisse zum Grunde legte, welcher denjenigen nützlich wäre, die mit dergleichen Zeichnungen sich sehr zu beschäftigen hätten.

§. 12. 6 Aufgabe: Die Verhältnis zweyer gegebenen Linien zu einander zu finden.

Auflösung. I Fall. Wenn die eine gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 13, IK = 98 Fuß, wie lang ist LM? Stellet also IK überzwerch zwischen 98, und suchet unverrückt mit der Weite LM zwey gleiche Zahlen, zwischen welche sie sich stellen läßt. Träfe nun LM auf 36: so ist IK : LM = 98 : 36 = 49 : 18.

II Fall. Wenn keine gemessen ist. Es sey z. E. Tab. II Fig. 14 die Verhältnis der Linien NO : PQ zu suchen. Stellet also die eine NO überzwerch zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 200, und versuchet unverrückt, zwischen welcher Zahl sich PQ überzwerch stellen lasse. Träfe PQ auf 80, so ist NO : PQ = 200 : 80 = 5 : 2.

Dieses Verfahren kann Ingenieuren im Felde nützlich seyn. Gesetzt, es sey ein Plan von einer Festung oder Gegend vorhanden, welchen aber der Maaßstab fehle; dergleichen Fälle vorkommen. Wenn man also nur irgend eine Weite entweder unmittelbar oder mittelbar, z. E. eine äußere Polygone der Festung, messen kann, und sich nicht die Mühe geben will, aus dieser gefundenen Weite den Maaßstab nach §. 7. II zu ergänzen: so findet man mit dem Riß, Proportionalzirkel und Handzirkel in den Händen sehr leicht jede andere gesuchte Weite.

§. 13. 7 Aufgabe: Zu dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Länge seines Umfangs, und umgekehrt aus dieser jenen zu finden.

Auflösung. Weil, nach dem **Ludolph von Ceulen**, sich jeder Durchmesser zu seinem Umfange beynahe wie 100 : 314 verhält, wofür man hier die halben Glieder 50 : 157 annehmen kann: so stellet im I Fall den gegebenen Durchmesser RS, Tab. II Fig. 15, überzwerch

zwischen

zwischen 50, und nehmet unverrückt, auch überzwerch die Weite zwischen 157; so ist die ihr gleiche ST die Länge des Umfangs ohne einen merklichen Fehler bey einem kleinen Durchmesser. Im II Fall stellet die gegebene Länge eines Umfanges ST zwischen 157 überzwerch, und nehmet unverrückt, auch überzwerch, die Weite zwischen 50: so ist die ihr gleiche RS der gesuchte Durchmesser. Eben so findet man 1) aus dem Halbmesser den halben Umfang und umgekehrt, jenen aus diesem, folglich 2) aus jedem Theile des Durchmessers den gleich vielten Theil der Länge des Umfanges.

Wäre der gegebene Durchmesser 3 Zoll: so ist die Länge des Umfangs beynahe $9\frac{3}{7}$ Zoll. Wenn also z. E. ein 6 Zoll hohes und 3 Zoll weites cylindrisches Gefäße aus Blech verfertigt werden soll: so muß ein 6 Zoll breites und $9\frac{3}{7}$ Zoll langes Blech der Breite nach zusammengelöthet werden, in welches ein Boden von 3 Zoll im Durchmesser passen wird. Wenn z. E. ein Rad in ein Getriebe greift, und dieses bey einem Umlauf 4mal herumdrehet: wie groß muß ein Rad seyn, welches eben dieses Getriebe bey einem Umlauf nur 3mal herumdrehet? Es sey Tab. II Fig. 16 der Durchmesser des ersten Rades VX. Stellet diesen überzwerch zwischen 4, oder einem Vielfachen der 4, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 3, oder dem gleich Vielfachen der 3: so ist die ihr gleiche YZ der Durchmesser des andern Rades. Denn die Umfänge der Kreise verhalten sich, wie ihre Durchmesser.

§. 14. 8 Aufgabe. Am Ende einer Linie eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Schneidet Tab. II Fig. 17 von AB ein beliebiges Stücke AC, vom gegebenen Endpuncte A an, ab. Stellet AC überzwerch zwischen 30. Nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 40, und beschreibt mit ihr aus A einen Bogen ab. Nehmet eben so die Weite zwischen 50, und beschreibet mit ihr aus C einen Bogen cd, der den vorigen in D durchschneide. Ziehet DA. Verfahret eben so, wenn ihr aus einem in einer Linie gegebenen Puncte eine senkrechte Linie errichten wollet.

Beweis. Weil $50^2 = 40^2 + 30^2$ d. i. $2500 = 1600 + 900$, also $DCq = DAq + ACq$: so ist der Winkel DAC ein rechter, Euclid. I B. 48 S. und also DA eine senkrechte Linie.

§. 15. Anmerkung.

Es geben also drey Linien, die sich wie 30, 40, 50, oder wie 3, 4, 5, oder 6, 8, 10, oder 15, 20, 25 u. s. w. verhalten, ein rechtwinklichtes Dreyeck. Allein es läßt sich, wie man sich ausdrückt, ein Pythagorisches Dreyeck in vielen andern Zahlen finden, wo die Quadratzahl der einen Zahl, der Summe der Quadratzahlen der übrigen beyden Zahlen gleich ist, wovon im Traité des Triangles rectangles en Nombres par PRENICLE. Paris 1676. 8. 116 Seit. 2 Bl. und in Joh. Joach. Langes Anhang zu des Hrn. Prof. Fr. Chr. Jetzes in Liegnitz lesenswerthen Disp. inaug. sistente Theorematis Pythagorici Demonstrationes plures Halae 1752 gehandelt wird. Dergleichen Zahlen werden durch Auflösung folgender Aufgabe aus

der Algebra gefunden, welche hier zur Abwechselung stehen mag, und mit welcher Kästners Analys. des Endl. §. 184-190 zu vergleichen ist.

§. 16. Aufgabe: Zwey ganze Zahlen zu finden, von welcher die Summe ihrer Quadratzahlen auch eine Quadratzahl ist.

Auflösung. Diese drey Zahlen mögen seyn x, y, z, und es sey $z^2 = x^2 + y^2$, so ist $z^2 - x^2 = y^2$. Man setze $z + x = a$, $z - x = b$: so ist $(z + x)(z - x) = z\ - x^2 = ab = y^2$. Nehmet also die Reihe der Quadratzahlen, deren jede y^2 sey, zerfället jede in zwey ungleiche Factoren a, b, und es sey $a > b$. Da nun a die Summe und b die Differenz der Zahlen z, x ist, auch $z > x$: so erhält man, nach einem bekannten Lehrsatze (Wolffs Trigon. des Ausz. §. 27) $\frac{a+b}{2} = z$, $\frac{a-b}{2} = x$. Weil also z, x ganze Zahlen seyn sollen: so kann man nur aus allen möglichen Paaren ungleicher Factoren solche nehmen, die entweder beyde gerade oder beyde ungerade sind, um gerade Summen und Differenzen zu erhalten, nach Euclid. IX B. 21. 22. 24. 26 S. Hieraus ist nachstehende Tafel über die ersten 60 Quadratzahlen entstanden, bey deren Berechnung die Tafeln der Theiler in Lamberts Samml. Berl. 1770. 8., und in POETII Anl. zur Arithm. Wiss. Frankf. u. L. 1728. 8. sehr wohl zu statten gekommen sind. Ihr Gebrauch für den Proportionalzirkel wird hernach gewiesen werden.

Tafel für Pythagorische Dreyecke in Zahlen.

y^2	$a \times b$	y	z	x
1	1. 1	1	1	0
4	— — —	2	— —	— —
9	9. 1	3	5	4
16	8. 2	4	5	3
25	25. 1	5	13	12
36	18. 2	6	10	8
49	49. 1	7	25	24
64	32. 2	8	17	15
	16. 4	8	10	6
81	81. 1	9	41	40
	27. 3	9	15	12
100	50. 2	10	26	24
121	121. 1	11	61	60
144	72. 2	12	37	35
	36. 4	12	20	16
	24. 6	12	15	9
	18. 8	12	13	5
169	169. 1	13	85	84
196	98. 2	14	50	48

y^2	$a \times b$	y	z	x
225	225. 1	15	113	112
	75. 3	15	39	36
	45. 5	15	25	20
	25. 9	15	17	8
256	128. 2	16	65	63
	64. 4	16	34	30
	32. 8	16	20	12
289	289. 1	[illegible]7	145	144
324	162. 2	18	82	80
	54. 6	18	30	24
361	361. 1	19	181	180
400	200. 2	20	101	99
	100. 4	20	52	48
	50. 8	20	29	21
	40. 10	20	25	15
441	441. 1	21	221	220
	147. 3	21	75	72
	63. 7	21	35	28
	49. 9	21	29	20

y^2	$a \times b$	y	z	x
484	242. 2	22	122	120
529	529. 1	23	265	264
576	288. 2	24	145	143
	144. 4	24	74	70
	96. 6	24	51	45
	72. 8	24	40	32
	48. 12	24	30	18
	36. 16	24	26	10
	32. 18	24	25	7
625	625. 1	25	313	312
	125. 5	25	65	60
676	338. 2	26	170	168
729	729. 1	27	365	364
	243. 3	27	123	120
	81. 9	27	45	36
784	392. 2	28	197	195
	196. 4	28	100	96
	98. 8	28	53	45
	56. 14	28	35	21
841	841. 1	29	421	420
900	450. 2	30	226	224
	150. 6	30	78	72
	90. 10	30	50	40
	50. 18	30	34	16
961	961. 1	31	481	480
1024	512. 2	32	257	255
	256. 4	32	130	126
	128. 8	32	68	60
	64. 16	32	40	24
1089	1089. 1	33	545	544
	363. 3	33	183	180
	121. 9	33	65	56
	99. 11	33	55	44
1156	578. 2	34	290	288
1225	1225. 1	35	613	612
	245. 5	35	125	120
	175. 7	35	91	84
	49. 25	35	37	12

y^2	$a \times b$	y	z	x
1296	648. 2	36	325	323
	324. 4	36	164	160
	216. 6	36	111	105
	162. 8	36	58	77
	108. 12	36	60	48
	72. 18	36	45	27
	54. 24	36	39	15
1369	1369. 1	37	685	684
1444	722. 2	38	362	360
1521	1521. 1	39	761	760
	507. 3	39	255	252
	169. 9	39	89	80
	117. 13	39	65	52
1600	800. 2	40	401	399
	400. 4	40	202	198
	200. 8	40	104	96
	160. 10	40	85	75
	100. 16	40	58	42
	80. 20	40	50	30
	50. 32	40	41	9
1681	1681. 1	41	841	840
1764	882. 2	42	442	440
	294. 6	42	150	144
	126. 14	42	70	56
	98. 18	42	58	40
1849	1849. 1	43	925	924
1936	968. 2	44	485	483
	484. 4	44	244	240
	242. 8	44	125	117
	88. 22	44	55	33
2025	2025. 1	45	1013	1012
	675. 3	45	339	336
	405. 5	45	205	200
	225. 9	45	117	108
	135. 15	45	75	60
	81. 25	45	53	28
	75. 27	45	51	24
2116	1058. 2	46	530	528

y^2	a × b	y	z	x
2209	2209. 1	47	1105	1104
2304	1152. 2	48	577	575
	576. 4	48	290	286
	384. 6	48	195	189
	288. 8	48	148	140
	192. 12	48	102	90
	144. 16	48	80	64
	128. 18	48	73	55
	96. 24	48	60	36
	72. 32	48	52	20
	64. 36	48	50	14
2401	2401. 1	49	1201	1200
	343. 7	49	175	168
2500	1250. 2	50	626	624
	250. 10	50	130	120
2601	2601. 1	51	1301	1300
	867. 3	51	435	432
	289. 9	51	149	140
	153. 17	51	85	68
2704	1352. 2	52	677	675
	676. 4	52	340	336
	338. 8	52	173	165
	104. 26	52	65	39
2809	2809. 1	53	1405	1404
2916	1458. 2	54	730	728
	486. 6	54	246	240
	162. 18	54	90	72
3025	3025. 1	55	1513	1512

y^2	a × b	y	z	x
	605. 5	55	305	300
	275. 11	55	143	132
	121. 25	55	73	48
3136	1568. 2	56	784	783
	784. 4	56	394	39[illegible]
	392. 8	56	200	192
	224. 14	56	119	105
	196. 16	56	106	90
	112. 28	56	70	42
	98. 32	56	65	33
3249	3249. 1	57	1625	1624
	1083. 3	57	543	540
	361. 9	57	185	176
	171. 19	57	95	76
3364	1682. 2	58	842	840
3481	3481. 1	59	1741	1740
3600	1800. 2	60	901	899
	900. 4	60	452	448
	600. 6	60	303	297
	450. 8	60	229	221
	360. 10	60	185	175
	300. 12	60	156	144
	200. 18	60	109	91
	180. 20	60	100	80
	150. 24	60	87	63
	120. 30	60	75	45
	100. 36	60	68	32
	72. 50	60	61	11

§. 17. Anwendung dieser Tafel.

Man schneide Tab. II Fig. 17 aus A ein Stücke AC nach Belieben ab, und suche in der Tafel drey Zahlen neben einander in den Spalten auf, worüber y, z, x stehet, doch so, daß z nicht größer, als 200 sey: so gehören die Zahlen y, x für die Schenkel des rechten Winkels AC, AD und z für die Hypotenuse CD, welche man, wie §. 14 gelehrt worden, ziehet. Daß die Tafel nicht nach der Reihe der natürlichen Zahlen für z geordnet und eingerichtet worden, sondern für y, oder x, welches völlig einerley ist, dieses ist deswegen geschehen, weil man in der Zeichnung mit einer Seite des Dreyecks, die den rechten Winkel einschließt, den Anfang machet. Hätte man aus z die übrigen beyden Zahlen nach einer andern Algebrai-

schen Aufgabe von Theilung einer Quadratzahl in zwey Quadratzahlen finden wollen: so wäre die Rechnung ohngleich mühsamer worden.

§. 18. 8 Aufgabe: Den Proportionalzirkel so weit zu öffnen, daß beyde Lineae arithmeticae einen rechten Winkel machen.

Auflösung. Nehmet eine gerade Linie an, die so groß oder kleiner, als die Linea arithmetica sey, und deren Länge sich in einer Zahl ausdrücken lasse, welche in voriger Tafel zu z gehöret, z. E. 61. Stellet diese Weite schief zwischen beyde Zahlen y, x, die neben z stehen, hier also zwischen 60 und 11: so ist wegen $61^2 = 60^2 + 11^2$ d. i. $3721 = 3600 + 121$, der Winkel ein rechter.

Wie aber der Proportionalzirkel so weit zu öffnen sey, daß er einen Winkelhaken vorstelle, wird bey Beschreibung der Lineae Chordarum gewiesen werden.

§. 19. 9 Aufgabe. Die Höhe eines Dreyecks aus dessen drey gegebenen Seiten zu finden.

Auflösung. Die Seiten mögen gemessen seyn, oder nicht: so stellet Tab. II Fig. 18 die Grundlinie EF, auf welche das Loth fällt, gerade auf die eine Lineam arithmeticam, und merket die Zahl, z. E. 14. Stellet die eine von den übrigen beyden Seiten EG auf die andere Lineam arithmeticam gerade, und merket die Zahl, z. E. 15. Stellet die dritte Seite GF, z. E. von 13 solchen Theilen der Lineae arithm., dergleichen EF 14, und EG 15 hat, schief auf beyden Lineis arithm. zwischen 14 und 15. Unverrückt setzet den einen Fuß des Handzirkels in 15 ein, und öffnet ihn so weit, bis daß der andere Fuß die andere Lineam arithm. nur berühre: so ist diese Weite, welche hier 12 solcher Theile betragen wird, der Höhe GH gleich. Trifft nun der Berührungspunct zwischen dem Mittelpuncte des Proportionalzirkels und dem andern Endpunkte der Grundlinie: so sind beyde Winkel E, F an der Grundlinie spitzig; trifft er aber in einer größern Weite: so fällt das Loth auf das verlängerte Stück der Grundlinie, und das Dreyeck ist an der Grundlinie stumpfwinklicht, wie Fig. 19 zeiget.

Weil durch dieses Verfahren der wahre Punct H nicht genau angegeben werden kann, indem ein mit dem Halbmesser GH aus G beschriebener Bogen zwar nach der Theorie die Grundlinie EF nur in einem einzigen Puncte berühret, in der Zeichnung aber selbst ein merklicher Theil dieses Bogens mit der Grundlinie zusammenfällt: so ist es besser, diesen Punct noch besonders nach folgender Aufgabe zu bestimmen.

§. 20. 10 Aufgabe: Den Punct in der Grundlinie eines Dreyecks zu finden, auf welchen dessen Höhe fällt.

Auflösung. Oeffnet beyde Lineas arithmeticas nach einem rechten Winkel §. 18. Stellet die nach §. 19 gefundene Höhe GH auf der einen Linea arithm. gerade, und merket die Zahl, z. E. 12. Nehmet die Weite der einen Seite GF, von deren Endpuncte F aus

der Punct H lieget, wo das Loth auf die Grundlinie trifft, und stellet sie schief zwischen 12 und einem Punct der andern Lineae arithm., so giebt die Zahl dieses Puncts, welche hier 5 ist, die Länge des gesuchten Stücks der Grundlinie an.

§. 21. Anmerkung.

Beyde Auflösungen geben ihrer Weitläufigkeit wegen keinen besondern Vortheil, ob sie gleich theoretisch richtig sind. Der Punkt H, so wie die Höhe GH selbst, wird am besten durch die Rechnung oder geometrische Construction nach Euclid. I B. 12 S. gefunden. Jene beruhet auf Euclid. II B. und zwar dessen 13 S. für jedes Dreyeck, dessen Winkel an der Grundlinie spitzig sind, auf dem 12ten Satz aber für eines, das einen stumpfen Winkel an der Grundlinie hat. Es sey für beyde Figuren EG = a, GF = b, EF = c, FH = x, so ist

1) Fig. 18. $GFq + EFq = EGq + 2 EF \times FH$, Euclid. II B. 13 S.

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2cx$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = x$$

Wenn nun $a = 15$, $b = 13$, $c = 14$: so ist $x = \frac{169 + 196 - 225}{28} = 5.$

2) Fig. 19. $EGq = GFq + EFq + 2EF \times FH$, Euclid. II B. 12 S.

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

$$\frac{a^2 - (b^2 + c^2)}{2c} = x$$

Mithin für $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$, ist $x = \frac{225 - (169 + 16)}{8} = 5.$

In beyden Fällen ist das Loth $GH = \sqrt{(GFq - FHq)}$; nehmlich $\sqrt{(b^2 - x^2)} = \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12.$

§. 22. II Aufgabe: Zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie zu finden.

Auflösung. I Fall. Wenn beyde Linien gemessen sind. Es sey Tab. II Fig. 20, IK = 24, LM = 36. Stellet LM überzwerch zwischen 24, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 36: so ist die ihr gleiche NO = 54, die gesuchte Linie.

II Fall. Wenn beyde Linien nicht gemessen sind. Sie mögen Tab. III Fig. 21, AB, CD seyn, und zwar itzt AB > CD, daß also die gesuchte kleiner, als CD seyn muß. Suchet die Verhältnis von AB : CD, welche 60 : 50 sey, §. 14. Stellet hierauf CD überzwerch zwischen 60, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 50: so ist die ihr gleiche EF die gesuchte Linie, nehmlich CD : EF = 60 : 50. Anders. Stellet AB gerade, und merket den Punct, in welchen sie trifft. In diesen Punct stellet CD überzwerch. Stellet hierauf unverrückt CD gerade, und nehmet von dem Puncte aus, in welchen sie trifft, über-

zwerch

zwerch die Weite: so ist die ihr gleiche EF die gesuchte Linie. Denn weil Tab. II Fig. 5 zum I Abschn. AB : BC = AD : DE
so ist hier AB : CD = CD : EF.

§. 23. Anmerkung.

Weil für diese Aufgabe, wenn a, b gegeben, und x gesucht wird, a : b = b : x ist: so wird mit einem Proportionalzirkel, wenn für ihn

zu groß	zu klein	angenommen	gefunden
a	—	$\frac{1}{n}a : b = b :$	nx
—	a	$na : b = b :$	$\frac{1}{n}x$
b	—	$a : \frac{1}{n}b = \frac{1}{n}b :$	$\frac{1}{n^2}x$
—	b	$a : nb = nb :$	n^2x
a	b	$\frac{1}{n}a : nb = nb :$	n^3x
b	a	$na : \frac{1}{n}b = \frac{1}{n}b :$	$\frac{1}{n^3}x$
a, b	—	$\frac{1}{n}a : \frac{1}{n}b = \frac{1}{n}b :$	$\frac{1}{n}x$
—	a, b	$na : nb = nb :$	nx

Exempel.

a : b = b : x	n	Zahlen für den Prop. Zirkel.	x
288 : 96 = 96 :	2	144 : 96 = 96 : 64	64 : 2 = 32
5 : 60 = 60 :	10	50 : 60 = 60 : 72	72. 10 = 720
15 : 225 = 225 :	5	15 : 45 = 45 : 135	135. 25 = 3375
96 : 8 = 8 :	6	96 : 48 = 48 : 24	24 : 36 = $\frac{2}{3}$
288 : 8 = 8 :	9	32 : 72 = 72 : 162	162 : 729 = $\frac{2}{9}$
2 : 270 = 270 :	9	18 : 30 = 30 : 50	50. 729 = 36450
252 : 756 = 756 :	42	6 : 18 = 18 : 54	54. 42 = 2268
2 : 6 = 6 :	10	20 : 60 = 60 : 180	180 : 10 = 18

§. 24. 12 Aufgabe: Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung. I Fall. Wenn keine gemessen, und die zweyte kleiner, als die erste ist, folglich die gesuchte kleiner, als die dritte seyn muß. Die drey Linien mögen seyn Tab. III Fig. 22, GH, IK, LM, so daß GH : IK = LM : x. Stellet GH gerade, und von dem Puncte aus, wo sie hintrifft, stellet IK überzwerch. Stellet unverrückt LM gerade, und nehmet von dem Punkte aus, wo sie hintrifft, die Weite überzwerch: so ist die ihr gleiche NO = x.

II Fall. Es sey die zweyte größer, als die erste, daß also die vierte größer, als die dritte, seyn muß. Auch sey Tab. III Fig. 23 gemessen PQ = 20, RS = 24, TV = 30. Stellet TV überzwerch zwischen 20, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 24: so ist die ihr gleiche XZ = 36, die vierte, vermöge I Abschn. §. 13.

§. 25. Anmerkung.

Weil auch für diese Aufgabe, wenn a, b, c gegeben sind, und x gesucht wird, a : b = c : x ist: so finden für einen vorhandenen Proportionalzirkel, nachdem von a, b, c eine, oder zwey, oder alle drey, zu groß oder zu klein sind, wie §. 23, folgende mögliche Veränderungen statt.

zu groß	zu klein	angenommen	gefunden
a	—	$\frac{1}{n}a : b = c :$	nx
b	—	$a : \frac{1}{n}b = c :$	$\frac{1}{n}x$
c	—	$a : b = \frac{1}{n}c :$	$\frac{1}{n}x$
—	a	$na : b = c :$	$\frac{1}{n}x$
—	b	$a : nb = c :$	nx
—	c	$a : b = nc :$	nx
a	b	$\frac{1}{n}a : nb = c :$	n^2x
a	c	$\frac{1}{n}a : b = nc :$	n^2x
b	a	$na : \frac{1}{n}b = c :$	$\frac{1}{n^2}x$
b	c	$a : \frac{1}{n}b = nc :$	x
c	a	$na : b = \frac{1}{n}c :$	$\frac{1}{n^2}x$
c	b	$a : nb = \frac{1}{n}c :$	x
a	b, c	$\frac{1}{n}a : nb = nc :$	n^3x
b	a, c	$na : \frac{1}{n}b = nc :$	$\frac{1}{n}x$
c	a, b	$na : nb = \frac{1}{n}c :$	$\frac{1}{n}x$
a, b	c	$\frac{1}{n}a : \frac{1}{n}b = nc :$	nx
a, c	b	$\frac{1}{n}a : nb = \frac{1}{n}c :$	nx
b, c	a	$na : \frac{1}{n}b = \frac{1}{n}c :$	$\frac{1}{n^3}x$
a, b, c	—	$\frac{1}{n}a : \frac{1}{n}b = \frac{1}{n}c :$	$\frac{1}{n}x$
—	a, b, c	$na : nb = nc :$	nx

Exempel.

a : b = c : x	n	Zahlen für den Prop. Zirkel.	x
240 : 60 = 48 :	3	80 : 60 = 48 : 36	36 : 3 = 12
25 : 300 = 30 :	5	25 : 60 = 30 : 72	72, 5 = 360
50 : 60 = 375 :	5	50 : 60 = 75 : 90	90. 5 = 450
6 : 36 = 24 :	3	18 : 36 = 24 : 48	48. 3 = 144
27 : 3 = 135 :	10	27 : 30 = 135 : 150	150 : 10 = 15
64 : 48 = 8 :	10	64 : 48 = 80 : 60	60 : 10 = 6
256 : 8 = 72 :	4	64 : 32 = 72 : 36	36 : 16 = 2 1/[illegible]
432 : 144 = 6 :	8	54 : 144 = 48 : 128	128 : 64 = 2
5 : 375 = 75 :	25	125 : 15 = 75 : 9	9. 625 = 5625
126 : 294 = 3 :	7	126 : 42 = 21 : 7	7

a : b = c : x	n	Zahlen für den Prop. Zirkel.	x
5 : 30 = 350 :	10	50 : 30 = 35 : 21	21. 100 = 2100
72 : 4 = 360 :	12	72 : 48 = 30 ; 20	20
384 : 6 = 4 :	12	32 : 72 = 48 : 108	108 : 144 = $\frac{1}{16}$
3 : 360 = 4 :	8	24 : 45 = 32 : 60	60. 8 = 480
4 : 5 = 448 :	8	32 : 40 = 56 : 70	70. 8 = 560
405 : 540 = 3 :	15	27 : 36 = 45 : 60	60 : 15 = 4
576 : 4 = 720 :	16	36 : 64 = 45 : 80	80 : 16 = 5
7 : 315 = 475 :	5	35 : 63 = 95 : 171	171. 125 = 21375
432 : 528 = 324 :	4	108 : 132 = 81 : 99	99. 4 = 396
4 : 5 = 8 :	10	40 : 50 = 80 : 100	100 : 10 = 10

§. 26. 13 Aufgabe: Zwischen zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Beyde Linien mögen Tab. III Fig. 24, AB, CD seyn. Verlängert AB um CD, so daß BE = CD. Verkürzet AB um CD, so daß AF = CD. Halbiret FB in G. Oeffnet beyde Lineas arithmeticas nach einem rechten Winkel §. 18. Stellet auf der einen $\frac{1}{2}$ FB = FG gerade; und aus dem Punct, in welchen sie trifft, stellet AG schief auf die andere Lin. arithm., so ist die dritte Linie zwischen dem Punct, wohin AG trifft, und dem Mittelpunct des Proportionalzirkels die gesuchte mittlere Proportionallinie HI.

Beweis. Es sey AB = a, CD = b, so ist AE = a + b, FB = a − b, folglich FG = $\frac{1}{2}$ FB = $\frac{1}{2}$ a − $\frac{1}{2}$ b und AG = AF + FG = b + $\frac{1}{2}$ a − $\frac{1}{2}$ b = $\frac{1}{2}$ a + $\frac{1}{2}$ b. Es ist aber in dem rechtwinklichten Dreyeck KLM, in welchem KL = FG, LM = AG,

$$MKq = MLq - KLq$$
$$MKq = AGq - FGq$$
$$= (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b)^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}b^2$$
$$= ab$$

Da nun AB : x = x : CD, d. i. a : x = x : b, folglich $ab = x^2$, und, wie erwiesen worden, ab = MKq: so ist auch x^2 = MKq, mithin MK = x. Es sey a = 128, b = 8, so ist a + b = 136, a − b = 120, $\frac{1}{2}(a+b) = 68$, $\frac{1}{2}(a-b) = 60$, $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)^2 = 4624$, $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 = 3600$, folglich $4624 - 3600 = 1024 = ab = x^2$, und x = 32. Durch diese Auflösung wird also ein Rechteck oder jedes schiefe Parallelogramm, dessen Grundlinie und Höhe gegeben ist, in ein Viereck verwandelt. Es wird aber hiervon noch einmal bey der Linea geometrica gehandelt werden; hier ward diese Aufgabe wegen ihrer merkwürdigen Auflösung mitgenommen.

§. 27. 14 Aufgabe: Ein gegebenes Rechteck in ein anderes zu verwandeln, dessen eine Seite gegeben ist.

Auflösung. Suchet zu der gegebenen einen Seite des gesuchten Rechtecks QR Tab. III Fig. 25, zu der einen Seite des gegebenen Rechtecks NO, und zu dessen andern Seite NP die vierte Proportionallinie SQ, §. 24: so ist das Rechteck SR = PO.

Beweis. Weil NO × NP = QR × QS seyn soll, Euclid. II B. 1 Erkl. (hier bedeutet das Zeichen × keine Multiplication, sondern NO × NP so viel, daß das Rechteck PO zwischen beyden Linien NO, NP enthalten sey, oder von zwey Linien, die der NO, und zwey andern, die der NP gleich sind, begränzt werde) so sind die Seiten beyder Rechtecke verkehrt proportionirt, Euclid. VI B. 16, oder es ist QR : NO = NP : QS. Ist SQ gegeben, und QR wird gesucht, so stehet umgekehrt SQ : NP = NO : QR.

§. 28. Anmerkungen zu dieser Aufgabe.

I. Es vertritt diese Aufgabe eigentlich die Stelle der gewöhnlichen von der Regula Trium inversa, für die doch, in Ansehung der Stellung der Zahlen, keine andere Auflösung möglich ist, als der Regulae Trium directae, und in Ansehung gegebener Linien keine andere Anwendung statt findet, als in der Aufgabe enthalten ist.

II. Ein wahres geometrisches Exempel ist folgendes. Zu $4\frac{1}{2}$ Ellen Tuch, welches $2\frac{1}{2}$ Elle breit liegt, soll Futter gekauft werden, welches $\frac{3}{4}$ Elle breit liegt: wie viel Ellen solches Futters werden erfordert? Hier ist $PN = 2\frac{1}{2}$, $NO = 4\frac{1}{2}$, $SQ = \frac{3}{4}$, folglich

$$SQ : PN = NO : QR$$
$$\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} : QR$$
$$\frac{3}{4} : \frac{10}{4} = \frac{18}{4} : QR$$
$$3 : 10 = 18 : 4QR$$

und für den Proportionalzirkel, vermöge §. 25,

$$30 : 10 = 18 : \tfrac{4}{10}\, QR$$

mithin $\frac{4}{10}\, QR = 6$, $QR = 15$.

III. Die geometrische Auflösung gilt für alle schiefe Parallelogramme, weil ein solches einem Rechteck gleich ist, das mit ihm einerley oder gleiche Grundlinie und Höhe hat, Euclid. I B. 35. 36 S. Es muß aber für ein gesuchtes schiefes Parallelogramm Tab. III Fig. 26 (das man ein Schieseck nennen könnte, so wie man Rechteck saget), außer seiner Grundlinie QR, einer seiner Winkel ZQR gegeben seyn, um, indem man mit QR durch S, und mit ZQ durch R, die Parallellinien ZX, XR ziehet, das Parallelogramm zu erhalten.

IV. Aufgaben, wie diese: wenn 40 Mann in 90 Tagen eine Schanze bauen, in wie viel Tagen wird sie von 72 Mann verfertigt werden? beruhen auf andern Gründen, unter andern auf folgendem Lehrsatz, daß, wenn von ähnlichen Ursachen C, c, in den Zeiten T, t, ähnliche Wirkungen E, e hervorgebracht werden, sich E : e = CT : ct verhalte; wovon der Beweis in Kästners Arithm. S. 137 stehet. Im gegebenen Exempel ist E = e, folglich CT =

CT=ct, nehmlich, was 40 Mann in 90 Tagen verfertigen, soll dem gleich seyn, was 72 Mann in einer gesuchten Anzahl von Tagen verfertigen, vorausgesetzt, daß jeder alle Tage gleichviel arbeite. Demnach ist C : c = t : T, Euclid. VII B. 19 S. und also 72 : 40 = 90 : 50 §. 24.

V. Endlich gilt für solche Aufgaben, als vom Geldwechsel, Interresse, und dergl. die schon §. 4 gemachte Erinnerung, um welcher willen sie hier mit Recht weggelassen werden. Weit vorzüglicher ist der Gebrauch des Proportionalzirkels in Auflösung einiger Aufgaben, welche die Perspective und Musik betreffen.

§. 29. Von Lamberts Proportionalzirkel für die Perspective.

I. Fig. 27 Tab. III sey MN der Boden, A ein auf ihm gegebener Punct, πR die senkrechte Tafel, in O das Auge, OQ die Verticalfläche, die Entfernung des Auges OP = SQ, die Höhe des Auges OS = PQ, AQ die Weite des Punctes A von der Grundlinie FR, die Horizontallinie πp: so ist a das Bild des Punctes A auf der Tafel, und man hat

$$AS : SO = OP : Pa$$

d. i. $AQ + QS : SO = OP : Pa$

oder, weil $QS = PO$, $SO = PQ$, und wenn man wechselt

$$AQ + PO : PO = PQ : Pa.$$

II. Hierauf beruhet die gewöhnliche Zeichnung, wie sie z. E. in Wolffs Perspect. des Ausz. gelehrt wird. Es sey Tab. III Fig. 28, der Punct A gegeben, ferner seine Entfernung AQ von der Grundlinie FR, die Höhe des Auges PQ, die Weite des Auges PO auf der Horizontallinie πp, wo man P den Augenpunct, O den Distanzpunct nennet. Machet $Q\alpha = QA$, ziehet αO; so ist a das Bild von A. Denn weil πp, FR Parallellinien sind: so hat man

$$PO : Pa = \alpha Q : aQ$$

$$PO : \alpha Q = Pa : aQ$$

$$PO + \alpha Q : PO = Pa + aQ : Pa$$

d. i. $AQ + PO : PO = PQ : Pa$

welches vorige Proportion ist.

III. Es ist klar, daß für jede perspectivische Zeichnung die Entfernung des Auges PO und seine Höhe PQ beständig, AQ aber und Pa veränderlich sind. So ist z. E. für den Punct B,

$$PO : Pb = \beta Q : bQ$$

mithin $BQ + PO : PO = PQ : Pb.$

Wenn demnach AG in der 27 Fig. oder AQ + PO in der 28 Fig. ein Vielfaches von PO ist: so ist PA von PQ ein gleich Vieltheilichtes. Denn es sey AS = nPO: so ist AS : PO = n : 1 = PQ : Pa, folglich $\frac{1}{n}PQ = Pa$. Und also wird

$$Pa = \tfrac{1}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5} \cdots\cdots PQ$$

wenn AS = 1, 2, 3, 4, 5 - - mal PO ist.

IV. Hieraus ergiebt sich folgende neue Einrichtung eines Proportionalzirkels. Man nehme die Höhe des Auges PQ zur Einheit an, da sie das Bild einer unendlich langen Linie ist, wie sich aus Fig. 27 sehr leicht urtheilen läßt. Denn wenn PQ das Bild von einer unendlich langen QA seyn soll: so muß Pa = o werden; und also wird aus Pa:PO = SO:SA diese Proportion o : PO = SO : ∞. Wenn man nun auf beyden Linealen des Proportionalzirkels Tab. III Fig. 29 fünf Paar gleiche Linien ziehet, und setzet, daß für sie die Entfernungen des Auges 2, 3, 4, 5 sind: so bedeuten diese Linien $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ PQ, d. h. wenn z. E. PQ 1 Fuß vorstellt, so stellen diese Linien 2, 4, 6, 8, 10 Fuß vor, nicht anders, wie verjüngte Maaßstäbe. Die übrige Eintheilung selbst ist aus folgender Tafel zu begreifen, deren Fortsetzung keine Schwierigkeit hat.

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{19}$
2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
4	6	10	14	18	22	26	30	34	38
6	9	15	21	27	33	39	45	51	57
8	12	20	28	36	44	52	60	68	76
10	15	25	35	45	55	65	75	85	95
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{4}{21}$
2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$
4	5	7	9	11	13	15	17	19	21
6	$7\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$
8	10	14	18	22	26	30	34	38	42
10	$12\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$	$47\frac{1}{2}$	$52\frac{1}{2}$

Für die Eintheilung in Dreymaltheile ergiebt sich z. E. der Anfang also:

1	$\frac{1}{2,1}$	$\frac{1}{2,2}$	$\frac{1}{2,3}$	$\frac{1}{3,1}$	$\frac{1}{3,2}$	$\frac{1}{3,3}$	$\frac{2}{3,1}$	$\frac{2}{3,2}$	$\frac{4}{5,1}$	$\frac{4}{5,2}$
2	4,2	4,4	4,6	6,2	6,4	6,6	3,1	3,2	2,55	2,6
4	8,4	8,8	9,2	12,4	12,8	13,2	6,2	6,4	5,1	5,2
6	12,6	13,2	13,8	18,6	19,2	19,8	9,3	9,6	7,65	7,8
8	16,8	17,6	18,4	24,8	25,6	26,4	12,4	12,8	10,2	10,4
10	21,0	22,0	23,0	31,0	32,0	33,0	15,5	16,0	12,75	13,0

Schon

Schon diese Tafeln dienen zur Prüfung eines solchen Werkzeuges. Es müssen z. E. aus dem Mittelpuncte C genommen

die Weiten C4, C8, C12, C16, C20
C3, C6, C9, C12, C15
C2½, C5, C7½, C10, C12½
C4,2; C8,4; C12,6; C16,8; C21 } u. s. w.

auf der Linie C2, C4, C6, C8, C10 einander gleich seyn.

V. Die Anwendung ist folgende. Es sey z. E. PO = 60 F. AQ = 20 F., so ist PO + AQ = 80, mithin 60 : 80 = PQ : Pa, d. h. PO ist die perspectivische 60, und Pa die perspectivische 80, oder jene 6, diese 8. Man stelle also PQ überzwerch auf der dritten Linie zwischen 6, und unverrückt nehme man überzwerch die Weite zwischen 8: so ist diese Pa.

VI. Das bisherige mag zu einiger Erläuterung von Lamberts Verbesserung des Proportionalzirkels wenigstens zur Vergleichung dieser Erfindung mit dem gewöhnlichen Unterricht z. E. in Wolffs Auszuge dienen, ehe man etwa sich mit den in der histor. Einl. angeführten Lambertischen Schriften und Karstens Perspective unterhalten will. Uebrigens kommen auf der andern Seite von Lamberts Proportionalzirkel die Lin. arithm. in 400 Theilen, die Lin. Tang. sec. und Sin. vor, nebst einer sehr nützlichen Linea elliptica. Die Eintheilung dieser Linie beruhet auf der Gleichung $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$ wo a die große, und c die kleine Axe bedeutet. Wird nun die halbe große Axe in 100 gleiche Theile getheilt, und nach und nach x genommen $\frac{1}{200}$ a, $\frac{2}{200}$ a, $\frac{3}{200}$ a bis $\frac{100}{200}$ a oder $\frac{1}{2}$ a: so ergeben sich für diese Abscissen die ihnen zugehörige halbe Ordinaten in Theilen der halben kleinen Axe. Diese Theile werden auf zwey Linien eines Proportionalzirkels aufgetragen: und so lassen sich zu jeder gegebenen großen und kleinen Axe die halben Ordinaten finden und ihre Endpunkte zusammenziehen. Bey astronomischen Zeichnungen von Parallelkreisen würde die Linea Sinuum gute Dienste leisten. Doch der Raum verbietet, alles dieses umständlich zu erklären; vielmehr ist es nöthig, Scheffelts Unterricht von zwey perspectivischen Zeichnungen noch beyzubringen.

§. 30. 15 Aufgabe: Einen Würfel in Perspectiv zu bringen.

Auflösung. Es sey Tab. III Fig. 31, die Höhe des Auges AB 6 F. zehntheil. Maaßes, die Entfernung des Auges AC = CD 10 F. Die Seite des Würfels FE = CE = CK = KL 4 F. also AG 6 F. Suchet zu DE, EF, DC die vierte Proportionallinie CQ §. 24, also 14 : 4 = 10 : CQ oder 140 : 40 = 100 : 28,5 §. 25, folglich CQ = 2′8″5‴. Ferner zu AK, AB, KC, die vierte CI, also 14 : 6 = 4 : CI, oder 140 : 60 = 40 : 17,1 folglich CI = 1′7″1‴. Endlich zu OL, BO, LM, die vierte MN, also 14 : 2 = 4 : MN, oder 140 : 20 = 40 : 5,7, folglich MN = 5″7‴. Ziehet IH = CQ mit GC parallel, ferner NR = CQ auch mit GC oder IH parallel. Verlängert FG in T, und ziehet TR, HR. Nach Lamberts Vorschrift §. 28. V. wäre Tab. III Fig. 32, PQ = 6 F. PO = 10 F. AQ = 4 F.

= 4 F. folglich PO + AQ = 14 F. also 10 : 14 = PQ : Pa d. h. auf der Linie seines Proportionalzirkels C 10 wird PQ überzwerch zwischen 10 gestellt, und unverrückt die Weite zwischen 14 überzwerch genommen, welcher Pa gleich ist. Man ziehe AP, hierauf ab mit QA parallel, beschreibe über AQ, ab die Vierecke CQ, da, und ziehe Cd, welche, wenn sie verlängert wird, in den Augenpunct P trifft.

§. 31. 16 Aufgabe: Auf eine andere Art einen Würfel und dessen Schatten in Perspectiv zu bringen.

Auflösung. Es sey Tab. III Fig. 33, EG die Grundlinie, ABDC der Grundriß eines Würfels, H der Augenpunct. Ziehet HF senkrecht auf EG, und machet FE = FH. Die Höhe des Auges sey EI. Verlängert HF in α, CD in β, AB in α, machet FM = Fβ, FG = Fα, so ist MG = DB. Beschreibet über MG das Viereck MGKL. Leget das Lineal an H an, und ziehet CO, AX, DP, BY. Leget das Lineal an I an, und ziehet MN, GW, Kb, LS. Aus O, X, P, Y errichtet die senkrechten Linien OQ = PR = FN, und XZ = Ya = FW. Ziehet QR, Za. Verlängert diese senkrechten Linien, und machet OT = PV = FS, auch Xc = Yd = Fb. Ziehet QZ, RA, Tc, Vd: so ist der Körper in Perspectiv gebracht. Für den Schatten, den er von einer hohen Kerze werfen soll, treffe ihre Höhe auf dem Boden in e. Ziehet eγ mit CD parallel, machet Fδ = Fγ, leget das Lineal an H an, und ziehet eg, leget es an I an, und ziehet δf. Errichtet gh senkrecht, und machet gh = Ff: so ist der Punct e in Perspectiv gebracht. Die Höhe der Kerze sey Fi. Ziehet eine senkrechte Linie ik = gh, leget das Lineal an I an, und ziehet kl. Verlängert gh, und machet gm = Fl: so ist das Licht in Perspectiv gebracht. Der Schatten ergiebt sich, wenn man hQ, hR, ha und mT, mV, md ziehet, diese 6 Linien verlängert, bis sie zusammentreffen, und zwischen den 3 Puncten, in welchen sie zusammentreffen, Linien ziehet.

* Auf diese Art konnte Scheffelts Unterricht, der fast 2 Seiten bey ihm einnimmt, abgekürzt werden. Er thut dabey eines von ihm erfundenen scenographischen Werkzeuges Meldung, welches er für sein rarestes Kunststück gehalten habe; es ist aber keine besondere Beschreibung davon vorhanden. Von solchen und andern Zeichnungen sind die Schriftsteller von der Perspective nachzusehen.

§. 32. Einige Begriffe aus der theoretischen Musik.

Wenn eine gespannte Saite einen gewissen **Klang** hervorbringt, dessen Größe ein **Ton** genennt wird, z. E. E: so giebt ebendieselbe bey einerley Spannung, aber unter der halben Länge, einen höheren Ton e an, welcher, mit jenem verglichen, die **Octave** heißt. Dieses Verhältnis der Längen, wie hier 2 : 1, durch welche der Unterschied zweyer Töne sich vorstellen läßt, heißt ein **Intervall**, der angenommene Ton aber, der **Grundton**. Da sich nun eine Saite nach vielen Verhältnissen eintheilen läßt: so sind auch viele Intervalle und Töne möglich, die sich in Theilen einer Saite, die einen gewissen Ton, als den Grundton angiebt, werden ausdrücken lassen; von welchen solche, die dem Ohr angenehm sind, **theils vollkommne Consonanzen** heißen, welche der **Einklang**, die **Octave** und die **Quinte** sind, **theils unvollkommne Consonanzen**, die **Terze** und **Sexte**. Eine solche Reihe von

Zahlen,

Zahlen, deren Glieder die Länge dieser Theile den gegebenen Intervallen gemäß andeuten, wird eine Tonleiter genennt, die bestimmte Art aber der Eintheilung einer Octave und ihrer Zwischentöne, heißt ein Klanggeschlechte, dergleichen das Diatonische, Chromatische und Enharmonische sind. Auch wird die geschickte Eintheilung einer Octave, um alle Töne, sowohl der harten, als weichen Tonart in der Praxis brauchbar und dem Ohr annehmlich zu machen, eine Temperatur genennt, deren von den Tonkünstlern verschiedene angegeben werden.

§. 33. Beyspiel der Diatonisch-Chromatischen Tonleiter für eine Octave.

Für 21 Töne der ersten Octave des Diatonisch-Chromatisch-Enharmonischen Klanggeschlechtes stehet sie in Marpurgs Anfangsgründen der theoretischen Musik S. 170. Aus ihr haben sich für die Octave E : e 1) die Intervalle, und 2) wenn man annimmt, daß eine Saite, die den Ton E angiebt, in 2000 Theile getheilt sey, vermittelst der Regel Detri die Tonleiter selbst sehr leicht berechnen lassen.

E : E	1 : 1	2000	Vnisonus, Einklang.
: F	16 : 15	1875	Hemitonium maius, der größere halbe Ton.
: Fis	9 : 8	1778	Tonus maior, der größere ganze Ton.
: G	6 : 5	1667	Tertia minor, kleine Terz.
: Gis	5 : 4	1600	Tertia maior, große Terz.
: A	4 : 3	1500	Quarta, vollkommne Quarte.
: B	36 : 25	1389	Quinta deficiens, verminderte Quinte.
: H	3 : 2	1333	Quinta, vollkommne Quinte.
: c	8 : 5	1250	Sexta minor, kleine Sexte.
: cis	5 : 3	1200	Sexta maior, große Sexte.
: d	9 : 5	1111	Septima minor, kleine Septime.
: dis	15 : 8	1067	Septima maior, große Septime.
: e	2 : 1	1000	Octaua, vollkommne Octave.

* Es war nöthig, diese neue Tafel, nach Anleitung eines so bewährten Tonkünstlers zu berechnen, und an die Stelle der vorigen zu setzen, welche Leupold aus dem Scheffelt, Scheffelt aus dem Goldmann, und Goldmann aus dem Metius genommen, dessen Zahlen er mit 6 dividirte, und so auf 2000 Theile reducirte. Die Consonanzen hatten eben den Weg genommen, Goldmann aber hatte sie aus dem Mersennus entlehnt.

§. 34. 17 Aufgabe: Die Saiten eines Monochords abzutheilen.

Auflösung. Das Monochord oder Einsaiter ist ein Werkzeug, welches mit einer Saite bezogen ist, um durch Abmessungen ihrer Theile für den durch sie gegebenen Grundton die Verschiedenheit der übrigen Töne aus einer Tonleiter und umgekehrt anzugeben. Es behält aber dieses Werkzeug seinen Nahmen, wenn es auch mit mehr Saiten bezogen ist, die alle im Einklange stehen, folglich für eine einzige Saite zu halten sind. Eine solche Saite sey

sey ME Tab. III Fig. 34. Stellet also ME überzwerch zwischen 200, und bey unverrücktem Proportionalzirkel nehmet überzwerch nach und nach die Weiten zwischen

187	und traget sie ab von M nach	F
179	„ „ „ „ „ „ „	Fis
168	„ „ „ „ „ „ „	G
160	„ „ „ „ „ „ „	Gis
150	„ „ „ „ „ „ „	A
139	„ „ „ „ „ „ „	B
133	„ „ „ „ „ „ „	H
125	„ „ „ „ „ „ „	c
120	„ „ „ „ „ „ „	cis
111	„ „ „ „ „ „ „	d
107	„ „ „ „ „ „ „	dis
100	„ „ „ „ „ „ „	e

Für die Intervallen der nächsten höheren Octave e : $\bar{e}$ ist es mathematisch richtig, daß man Me überzwerch zwischen 200 stellen, und bey unverrücktem Proportionalzirkel überzwerch vorige Weiten von M aus abtragen müsse: allein damit werden nicht alle Tonkünstler zufrieden seyn; worauf man sich aber hier nicht einlassen kann.

§. 35. 18 Aufgabe: Zu einer gegebenen Linie, die einen gewissen Ton vorstellet, zwey andere zu finden, die einen gegebenen auf- und absteigenden Ton vorstellen.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB Tab. III Fig. 35; man soll zwey andere finden, welche den auf- und absteigenden Tonum maiorem vorstellen. Es ist aber für solchen die Verhältnis 9 : 8 §. 33, oder 180 : 160. Stellet also AB überzwerch zwischen 180, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 160: so ist die ihr gleiche CD der aufsteigende Tonus maior. Stellet hierauf AB überzwerch zwischen 160, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 180: so ist die ihr gleiche EF der absteigenden Tonus maior. Wenn also z. E. AB den Ton E vorstellet: so ist CD, Fis, und EF sey x. Demnach

$$\begin{array}{l} EF : AB = 9 : 8 = x : E \\ AB : CD = 9 : 8 = E : Fis \\ \hline EF : CD = 81 : 64 = x : Fis \end{array}$$

Dieses ist aber die Tertia maior der Griechen nach Marpurg S. 36, welche man nicht unter die Consonanzen rechnet, sondern die Verhältnis um das Syntonische Comma vermindert. Dieses giebet $(81 : 64) - (81 : 80) = \frac{64}{81} : \frac{80}{81} = \frac{64}{81} \times \frac{81}{80} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$, also die reine große Terz. So wird aber

EF :

EF : AB = 10 : 9 = D : E Tonus minor
AB : CD = 9 : 8 = E : Fis Tonus maior
EF : CD = 10 : 8 = D : Fis Tertia maior
= 5 : 4

§. 36. Anmerkung und Zusatz zur historischen Einleitung.

Es ist klar, daß soche Abtheilungen auf einem jeden mit Saiten bezogenen Instrument statt finden, auf welchem entweder die Abtheilungen angegeben sind, oder vermittelst der Finger bestimmt werden; in welchem letztern Falle, weil es auf kleine Weiten ankommt, je genauer die Theilungspuncte für die Intervalle getroffen werden, desto reiner auch die Töne ausfallen. Von der Abtheilung des Monochords, vermittelst des Proportionalzirkels, handelt **Schott** Magiae Vniuers. P. II Bamberg. 1674, 4 p. 291 sq. nennet ihn *Instrumentum Chordotomum*, und ziehet auf ihm drey Linien, Diatonicam, Chromaticam und Enharmonicam. Er beruft sich daselbst auf **Kirchers** Musurgiam und seine Amussin Ferdinandeam Additionibus et Scholiis auctam, in derer Ausgabe Herbipoli 1662, 4 P. III zwar vom Proportionalzirkel gehandelt wird, aber von dessen Gebrauch bey der Eintheilung des Monochords durch eine Lineam harmonicam nur in etlichen Zeilen p. 454 mit Berufung auf **Kirchern** und **Metium** Meldung geschiehet. In **Schotts** Werken ist einiges enthalten, was zur Ergänzung der historischen Einleitung dienen kann. Er schreibt in der Amussi Ferdinand. p. 377 und im Pantometro Kircheriano Herbip. 1660, 4 p. 328, daß man die Erfindung des Proportionalzirkels theils einem Holländer, theils einem Italiäner und einem Deutschen zuschreibe. Der Holländer müßte **Metius** seyn. Aber in der Amussi Ferdinand. p. 12. 13 berichtet er ausdrücklich von CLAVII Instrumento Partium, daß er es zu Rom in **Kirchers** Museo gesehen habe, und es wäre mit der Linea Arithm. Geom. Stereom. nebst andern versehen gewesen, sey also ein Proportionalzirkel, qualem GALILAEUS *postea* et alii construxerunt. Hat **Schott** nicht etwa dieses bloß seinem Ordensgenossen zur Ehre geschrieben: so hat er den **Clavius** für den Erfinder des Proportionalzirkels gehalten.

§. 37. Berechnung der Länge der Orgelpfeifen für eine offne Stimme.

In **Hallens** Kunst des Orgelbauens, Brandenb. 1779, 4, kommt S. 33 nachstehende Tafel N. I vor, für die Länge der Pfeifen einer offnen Stimme in einer Octave von 4 Fuß, nach dem Pariser Fuß, dessen Linie in 12 Puncte, wie sie daselbst heißen, getheilt wird. Diese Längen sind nach einer Vorschrift S. 31. 32 berechnet, wohin auch daselbst Tab. VI Fig. 1 gehöret, welche die Intervalle in der Ordnung giebt, wie sie N. II stehet. Diese sind nun hier auf Theile der Länge von C N. III reducirt worden, woraus sich die Intervalle N. IV ergaben.

I.	F.	Z.	L. P.	II.	III.	IV.
C	4.	0.	0. 0	C	1 C	C : C = 1 : 1
Cs	3.	9.	6. 9	F $\frac{3}{4}$ C	$\frac{3}{4}$ C	: Cis = 256 : 243
D	3.	6.	8. 0	G $\frac{2}{3}$ C	$\frac{2}{3}$ C	: D = 9 : 8
Ds	3.	4.	6. 0	D $\frac{4}{3}$ G	$\frac{8}{9}$ C	: Es = 32 : 27
E	3.	1.	11. 1	A $\frac{2}{3}$ D	$\frac{16}{27}$ C	: E = 81 : 64
F	3.	0.	0. 0	E $\frac{4}{3}$ A	$\frac{64}{81}$ C	: F = 4 : 3
Fs	2.	10.	2. 0	H $\frac{2}{3}$ E	$\frac{128}{243}$ C	: Fis = 1024 : 729
G	2.	8.	0. 0	B $\frac{3}{4}$ F	$\frac{9}{16}$ C	: G = 3 : 2
Gs	2.	6.	4. 0	Es $\frac{3}{2}$ B	$\frac{27}{32}$ C	: Gis = 128 : 81
A	2.	4.	5. 4	Gs $\frac{3}{4}$ Es	$\frac{81}{128}$ C	: A = 27 : 16
B	2.	3.	0. 0	Cs $\frac{3}{2}$ Gs	$\frac{243}{256}$ C	: B = 16 : 9
H	2.	1.	3. 4	Fs $\frac{3}{4}$ Cs	$\frac{729}{1024}$ C	: H = 243 : 128
c	2.	0.	0. 0	c $\frac{1}{2}$ C	$\frac{1}{2}$ C	: c = 2 : 1

Vermöge Marpurgs Anfangsgr. S. 110 ist die Temperatur N. IV der Anfang theils des Quinten- theils des Quartenzirkels. Nehmlich

3 : 2 = C : G	4 : 3 = C : F
3 : 4 = G : D	4 : 3 = F : B
9 : 8 = C : D	16 : 9 = C : B
3 : 2 = D : A	2 : 3 = B : Es
27 : 16 = C : A	32 : 27 = C : Es
3 : 4 = A : E	4 : 3 = Es : Gs (Es : As)
81 : 64 = C : E	128 : 81 = C : Gs (C : As)
3 : 2 = E : H	2 : 3 = Gs : Cs (As : Des)
243 : 128 = C : H	256 : 243 = C : Cs (C : Des)
	4 : 3 = Cs : Fs (Des : Fis)
	1024 : 729 = C : Fs

Der Anfang des Quintenzirkels giebet die Diatonische Leiter, der Anfang aber des Quartenzirkels die Abtheilungen zur chromatischen Leiter. Nach Sorges in der Rechen- und Meßkunst wohlerfahrnen Orgelbaumeister 1773, 4 kommt die Verhältnis 2 : 1 nicht der Octave, sondern der None, oder der kleinen oder großen Decime zu, weil sonst die Pfeifen in den Oberoctaven zu klein, und in der unteren zu groß würden; woraus also ganz andere Verhältnisse entstehen müssen. Man muß dieses dahin gestellt seyn lassen.

§. 38. Gebrauch des Proportionalzirkels, den Durchmesser dieser Pfeifen zu finden.

Wenn einmal die Längen der Pfeifen für eine Octave festgesetzt sind: so ergeben sich daraus durch eine sehr leichte Rechnung die Längen für die übrigen Octaven. Denn weil z. E.

C : D

$$C:D = 9:8$$
$$D:d = 2:1$$
so ist $C:d = 18:8 = 9:4$

demnach die halbe Länge. Mithin für das erste C von 4 F. ist, das zweyte D lang $\frac{1}{2}$ (3 F. 6 Z. 8 L.) = 1 F. 9 Z. 4 L. Die abnehmenden Durchmesser der Pfeifen lassen sich zwar am leichtesten durch eine Zeichnung finden, die beym Hallen Tab. VI vorkommt: man kann sich aber auch des Proportionalzirkels bedienen, dessen Anwendung noch folgende Vorbereitung erfordert. Es sey Tab. III Fig. 36 AB die Länge der Pfeifen für das erste C, von 4 F. ihr Durchmesser BC = 2 Z. $1\frac{1}{2}$ L. Die Länge also der kürzesten Pfeife für das $\overline{\overline{c}}$ ist $\frac{1}{16}$ AB = 3 Z. = AD, ihr Durchmesser DE = $3\frac{3}{4}$ Lin. nach Hallen S. 32. Wenn nun CD, CB auf AB senkrecht stehen, die Längen der Pfeifen von A nach B abgetragen, CE gezogen, und mit ED durch die Theilungspunkte zwischen D und B Parallellinien gezogen werden: so sind diese die gesuchten Durchmesser. Wäre nun AB : AD = BC : DE, so müßte die verlängerte CE in A treffen. Allein nach den Datis ist es nicht. Denn wenn man alles auf Puncte reducirt: so ist wohl 6912 : 432 = 306 : $19\frac{1}{8}$, aber nicht 45. Mithin müssen BA und CE verlängert werden, bis sie in F zusammentreffen und AF gesucht werden. Es sey AF = x: so ist, wegen

$$FB:BC = FD:DE$$
$$\text{d. i. } FA + AB : BC = FA + AD : DE$$
$$x + 6912 : 306 = x + 432 : 45$$

wenn nehmlich ist alles auf Puncte reducirt wird. Folglich ist die Gleichung

$$45x + 311040 = 306x + 132192$$
$$\underline{\quad 132192 \qquad 45x \quad}$$
$$178848 = 261x$$
$$\text{Demnach } x = 685 = FA$$
$$\underline{432} = AD$$
$$1117 = FD$$

Gesetzt also, es sollte der Durchmesser HI für eine Pfeife von gedoppelter Länge, als die kürzeste ist, oder für $\overline{c}$ gefunden werden: so ist DH = AD = 432, mithin AH = 2 AD = 864, und FA + AH = FH = 1549. Demnach

$$FD:DE = FH:HI$$
$$1117:45 = 1549:HI$$

oder ohne einen merklichen Fehler für den Proportionalzirkel

$$112:45 = 155:HI$$

folglich HI = 62 Puncte oder 5 L. 2 P. Man findet daher überhaupt den Durchmesser zu jeder gegebenen Länge, wenn man zu der Summe der Länge der größten Pfeife und der Linie

 FA,

FA, der Summe der gegebenen Länge und dieser Linie FA, und dem Durchmesser der größten Pfeife die vierte Proportionallinie suchet §. 24.

§. 39. Gebrauch des Proportionalzirkels beym Glockengießen.

Wenn zwey Glocken aus einerley Metall dergestallt gegossen werden, daß sie in allen ihren Theilen einander ähnlich sind, und man sich solche als Körper vorstellet, die aus lauter kleinen über einander liegenden Ringen zusammengesetzt sind, welche einerley Spannung haben: so darf nur von einer Glocke, deren Ton gegeben ist, der Durchmesser einer dieser Ringe gegeben seyn, um den Durchmesser eines ähnlich liegenden Ringes für eine Glocke zu finden, die einen andern Ton angeben soll. Denn so verhalten sich die Durchmesser, wie die Ringe, welche für gleich stark gespannte Saiten von einerley Metall anzusehen sind, und die Ringe, wie die Töne, folglich die Durchmesser oder Halbmesser wie die Töne. Man siehet hierbey vornehmlich auf den Ring, an welchen der Klöppel anschlägt, wo die Glocke am dicksten ist, welcher Ring der **Kranz** oder **Schlag**, und dessen Dicke die **Kranzdicke** heißt; da denn sich auch die Kranzdicken wie die Töne verhalten. Wenn also die Kranzdicke der größten Glocke eines Geläutes gegeben ist, und man will sie für zwey kleinere Glocken finden, welche die große Terz und Quinte angeben sollen: so sey Tab. III Fig. 37, GH die gegebene Kranzdicke. Für die große Terz ist die Verhältnis 5 : 4 = 50 : 40. Stellet AB überzwerch zwischen 50, und unverrückt nehmet überzerch die Weite zwischen 40: so ist die ihr gleiche IK die Kranzdicke für die große Terz. Die Verhältnis 3 : 2 ist die Quinte, oder 60 : 40. Stellet GH überzwerch zwischen 60, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 40: so ist die ihr gleiche LM die Kranzdicke für die Quinte. Nach den Regeln der Glockengießer ist die Kranzdicke 14mal genommen die Weite der Glocke in der Kranzdicke oder der Durchmesser des Kranzes. S. **Hartwigs** Fortsetzung von **Sprengels** Handwerken und Künsten V Samml. S. 27 f.

§. 40. Von den Proportionallinealen.

Der Vortheil, welchen der Proportionalzirkel verschafft, bestehet also darinnen, daß man zu gegebenen geraden Linien eine dritte, vierte, auch mittlere Proportionallinie ohne Zeichnung findet. Trägt man aber seine Linien einzeln auf ein Lineal auf: so muß man jedesmal zugleich eine besondere Zeichnung machen. Ein solches Lineal heißt ein **Proportionallineal**. Wenn demnach z. E. zu drey gemessenen Linien, die sich, wie 60, 48, 80 d. i. wie 15, 12, 20 verhalten, wenn mit 4 dividirt wird, die vierte Proportionallinie gesucht wird: so ziehet man Tab. III Fig. 38 eine gerade Linie von beliebiger Länge, und trägt auf ihr in Theilen der Lin. arithm. OP von 15, ON von 20 Theilen ab. Hierauf beschreibe man aus O mit OP, ON Bogen, und schneide aus P mit einer Weite von 12 solchen Theilen die Sehne PQ ab, ziehe hierauf OQ und verlängere sie, bis sie den andern Bogen in R durchschneide: so ist NR, die Sehne dieses Bogens, die vierte Proportionallinie zu OP, ON, PQ, welche auf der Lin. arithm. gestellt 16 Theile hat, und also diese Theile 4mal genommen, die vierte Proportionallinie

tionallinie von 64 giebt, welche zu den gegebenen von 60, 48, 80 Theilen gehöret. Mithin ist man des jedesmaligen Zeichnens eines Winkels durch den Proportionalzirkel überhoben, und es ist hier OP : PQ = ON : RN wie beym Proportionalzirkel I Abschn. §. 13. vergl. mit Tab. II Fig. 5. 6 zum ersten Abschn.

* Scheffelt trug 8 Linien auf einen viereckichten Stab, nennte ihn Pedem mechanicum artificialem, und gab die Beschreibung Ulm, 1699, 4 heraus. In der Vorrede ALB. VEIEL Prof. Math. Gymn. Vlm. wird ihm diese Erfindung zugeschrieben, doch aber mit der Anzeige, daß Scheffelt gestehe, es hätten ihm Schildknecht in seinem Fortifications-Werk und ELIAS A LENNEP in Problem. Math. Anleitung dazu gegeben. Bramer trug zuerst die Linien des Proportionalzirkels auf eine einzige Platte, allein er brachte doch noch ein bewegliches Lineal dabey an, s. histor. Einl. auf 1615 und Leupolds Theatr. S. 120. Vermöge der hist. Einl. ist Metius der erste, der alle Linien des Proportionalzirkels auf beyde Seiten eines Lineals auftragen gelehrt und den Gebrauch davon gewiesen hat; welches nachher andere mehr auf verschiedene Art gethan haben.



III. Von der Linea Geometrica.

Länge der Seiten des 1 = 100fachen Vierecks.							
V.	Seite	V.	Seite	V.	Seite	V.	Seite
1	1,000	26	5,099	51	7,141	76	8,718
2	1,414	27	5,196	52	7,211	77	8,725
3	1,732	28	5,291	53	7,280	78	8,832
4	2,000	29	5,385	54	7,348	79	8,888
5	2,236	30	5,477	55	7,416	80	8,944
6	2,449	31	5,568	56	7,483	81	9,000
7	2,646	32	5,657	57	7,550	82	9,055
8	2,828	33	5,745	58	7,616	83	9,110
9	3,000	34	5,831	59	7,681	84	9,165
10	3,162	35	5,916	60	7,746	85	9,220
11	3,317	36	6,000	61	7,810	86	9,274
12	3,464	37	6,083	62	7,874	87	9,327
13	3,605	38	6,164	63	7,937	88	9,381
14	3,742	39	6,245	64	8,000	89	9,434
15	3,873	40	6,325	65	8,062	90	9,487
16	4,000	41	6,403	66	8,124	91	9,539
17	4,123	42	6,481	67	8,185	92	9,592
18	4,243	43	6,557	68	8,246	93	9,644
19	4,359	44	6,633	69	8,307	94	9,695
20	4,472	45	6,708	70	8,367	95	9,747
21	4,582	46	6,782	71	8,426	96	9,798
22	4,690	47	6,856	72	8,485	97	9,849
23	4, 96	48	6,928	73	8,544	98	9,899
24	4,899	49	7,000	74	8,602	99	9,950
25	5,000	50	7,071	75	8,660	100	10,000

§. 1. Erklärung und Absicht.

Die Linea geometrica ist diejenige Linie, auf welcher die Seiten der vielfachen Vierecke eines angenommenen ausgedrückt sind. Da nun alle ähnliche ebene Figuren sich wie die Vierecke ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten: so dienet vornehmlich diese Linie, alle ebene Figuren nach jeder gegebenen Verhältnis zu vergrößern oder zu verjüngen.

§. 2.

§. 2. Eintheilung.

Weil man sie der Lineae arithmeticae gleich macht: so kann sie nach ihrer ganzen Länge füglich die Seite eines 100fachen Vierecks vorstellen, daß also $\frac{1}{10}$ davon die Seite des einfachen giebet. Man gebe daher dieser Seite 1000 Theile, und suche die Seiten der vielfachen Vierecke durch Ausziehung der Quadratwurzeln der ersten 100 Zahlen ebenfalls bis auf Tausendtheile. Diese Theile werden mit Hülfe eines verjüngten tausendtheilichten Maaßstabes aufgetragen, oder, wenn man will, die doppelten Quadratwurzeln von einem zweytausendtheilichten II §. 3. Diese Wurzeln der ersten 100 Zahlen stehen bis auf 7 Decimalstellen in Lamberts Samml. math. Tabellen S. 208, der ersten 1000 Zahlen auch auf 7 Decimalstellen in der vortreflichen Schulzischen Samml. math. Tafeln II B. S. 288. 293 vom Herrn Prof. Röhle berechnet. Vermöge der Erinnerung II §. 2, gehet man bey Eintheilung dieser und aller Linien des Proportionalzirkels überhaupt aller Linien, am sichersten von den größeren Abtheilungen nach und nach zu den kleineren.

§. 3. Prüfung der Eintheilung.

Weil von den Zahlen	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
die Quadratwurzeln	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
so sind von	2,	8,	18	32,	50,	72,	98,			
die Quadratwurzeln	$\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$,	$4\sqrt{2}$,	$5\sqrt{2}$,	$6\sqrt{2}$,	$7\sqrt{2}$			

überhaupt $\sqrt{na^2} = a\sqrt{n}$. Folglich muß $\frac{1}{10}$ der ganzen Linie in die Puncte 1, 4, 9, 16 2c. treffen, wenn man diese Weite mit dem Handzirkel faßt und ihn nach der Länge umschlägt; und so die Weiten von dem gleich Vielfachen der Zahlen 1, 4, 9, 16 2c. mithin 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98; 3, 12, 27, 48, 75; 4, 16, 36, 64, 100; 5, 20, 45, 80; 6, 24, 54, 96; 7, 28, 63; 8, 32, 72, 9, 36; 81; 10, 40, 90; 11, 44, 99; 12, 48; 13, 52; 14, 56; 15, 60; 16, 64; 17, 68; 18, 72; 19, 76; 20, 80; 21, 84; 22, 88; 23, 92; 24, 96; 25, 100.

§. 4. Allgemeine Anmerkung vom Gebrauch dieser Linie.

Der Gebrauch der Lineae Geometricae, nach andern Planorum, Quadratorum, erstreckt sich eigentlich nur auf geometrische Aufgaben, so daß die Ausziehung der Quadratwurzel nach den arithmetischen Regeln dem Gebrauch des Proportionalzirkels allemal vorzuziehen ist, ob es gleich mit ihm auch so ziemlich angehet, aber mehr Umstände erfordert, wie folgende Exempel zeigen.

1) Man suchet $\sqrt{81}$. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 81, stellt diese Weite auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 81, nehmet auf ihr unverrückt die Weite überzwerch zwischen 1, welche auf der Lin. arithm. gerade gestellt 9 zur Quadratwurzel giebt. Denn es ist $\sqrt{a} : \sqrt{1} = a : x$, folglich $x = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

2) Man

2) Man suchet $\sqrt{1000}$. Die Wurzel dieser Zahl hat 2 Theile. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade die Zahl der ersten Classe 10, stellet diese Weite auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 10, und nehmet auf ihr unverrückt die Weite überzwerch zwischen 100: so beträgt diese Weite auf der Lin. arithm. gerade gestellt, etwas über 31. Denn es ist $\sqrt{10} : \sqrt{100} = \sqrt{100} : \sqrt{1000} = 10 : 31$.

3) Man suchet $\sqrt{876235}$. Die Wurzel dieser Zahl hat 3 Theile. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 87, 6, also nach dem Augenmaaß, stellet diese Weite auf der Linea geom. überzwerch zwischen 87, 6, und nehmet auf ihr unverrückt die Weite überzwerch zwischen 100: so beträgt diese Weite auf der Lin. arithm. gerade gestellt, etwas über 93, 6. Die Wurzel ist also 936. Denn es ist $\sqrt{87,6} : \sqrt{100}$ beynahe wie $\sqrt{876235} : \sqrt{1000000}$, und vermöge des Verfahrens $\sqrt{87,6} : \sqrt{100} = 87,6 : 93,6$ oder $1 : 10 = \sqrt{87,6} : 93,6$; mithin $10\sqrt{87,6} = 93,6$ und $\sqrt{876\ldots} = 936$. Man siehet hieraus, daß die so leichte arithmetische Ausziehung der Quadratwurzel einem solchen Verfahren, wo es auf das Augenmaaß ankommt, vorzuziehen sey.

* Bey dieser Gelegenheit bringen Scheffelt und Barnickel einige militärische Aufgaben bey, welche sie mit Hülfe des Proportionalzirkels aufzulösen lehren. Um sie nicht ganz wegzulassen, ist es der Mühe nicht ganz unwerth, zu zeigen, wie man sich dabey der Buchstabenrechnung bedienen könne.

§. 5. Rechnungsaufgaben von Schlachtordnungen.

I. Von den Stellungen in einem Viereck. Die hieher gehörigen Aufgaben sind von doppelter Art. Nach der ersten, aber ungewöhnlichern, kommen so viel Soldaten in ein Glied, als Glieder sind. Die Zahl also der Soldaten in jedem Gliede oder die Zahl der Glieder ist die Quadratwurzel der gegebenen Zahl aller Soldaten; und umgekehrt ist diese die Quadratzahl einer von jener, z. E. 9604 Mann geben $\sqrt{9604} = 98$ Glieder, jedes von 98 Mann. Umgekehrt zu 50 Gliedern, jedes von 50 Mann, werden $50^2 = 2500$ Mann erfordert. Nach der zweyten gewöhnlichern Bedeutung betrifft diese Aufgabe das Bataillon carré, wo Soldaten in einem Viereck gleich breit und gleich hoch gestellt werden. Es wird also die Stellung um einen viereckichten Platz genommen, der entweder gegeben, oder willkührlich ist. Im ersten Fall, wenn der Platz gegeben ist, stehet gemeiniglich auf ihm die Bagage oder Artillerie. Im andern Fall ist er leer. Ist nun der Platz gegeben: so wird dadurch die Zahl der Soldaten bestimmt, welche in dem Umfange des ersten Vierecks stehen und ihn einschließen, und so das übrige gefunden. Nehmlich

1) Wenn in dem Umfange eines Vierecks a Soldaten Fronte machen: so machen nicht $\frac{1}{4}$a in jeder Seite Fronte, sondern, wenn in dem einen Paare paralleler Seiten 2α Soldaten Fronte machen: so stehen in dem andern Paare $2\alpha - 4$ Mann, so daß $a = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$ und $\alpha = \frac{1}{4}a + 1 = \frac{a+4}{4}$

Z. E. $a = 122$, also $\alpha = \frac{122 + 4}{4} = 31$. In zwey parallelen Seiten stehen $2.31 = 62$, in den andern beyden $2.29 = 58$ Mann, und 2 Mann bleiben übrig. Es sey $\alpha = 100$, so ist $a = 4.99 = 396$.

2) Wenn in dem Umfange des ersten innern Vierecks a Soldaten stehen, so stehen im Umfang des zweyten $a + 8$, des dritten $a + 16$ rc. also

$$
\begin{array}{lll}
\text{des 1sten} & a & = a + 8\,(1 - 1) \\
\text{2ten} & a + 8 & = a + 8\,(2 - 1) \\
\text{3ten} & a + 16 & = a + 8\,(3 - 1) \\
\text{folglich des nten} & & a + 8\,(n - 1)
\end{array}
$$

Die Menge aller Soldaten in n Glieder sey A: so ist sie die Summe einer arithmetischen Reihe, und also

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}n\,(a + a + 8\,(n - 1)) \\
&= n\,(a + 4\,(n - 1))
\end{aligned}
$$

Hier wird A aus a und n gefunden. Soll es aber aus α und n gefunden werden: so ist aus N. 1,

$$
\begin{aligned}
A &= n\,(4.\overline{\alpha - 1} + 4.\overline{n - 1}) \\
&= 4n\,(\alpha + n - 2)
\end{aligned}
$$

Z. E. um einen viereckichten Platz stehen 100 Mann; man will die Mannschaft in 4 Glieder stellen. Also $a = 100$, $n = 4$, mithin $A = 4\,(100 + 4\,.\,3) = 4\,.\,112 = 448$ Mann. Und demnach im Umfange des ersten Vierecks 100, des zweyten 108, des dritten 116, des vierten 124 Mann. Es ist nicht erst nöthig, diese und folgende Stellungen durch Figuren zu erläutern, die sich leicht entwerfen lassen.

Wenn aber in der einen Seite 50 Mann Fronte machen, und alle in 6 Gliedern oder 6 Mann hoch stehen sollen: so ist $\alpha = 50$, $n = 6$, folglich $A = 4\,.\,6\,(50 + 6 - 2) = 24\,.\,54 = 1296$.

3) Um n zu finden, erhält man aus

$$A = n\,(a + 4.\overline{n - 1})$$

die unreine quadratische Gleichung

$$n^2 + n.\frac{a - 4}{4} = \tfrac{1}{4}A$$

für diese ist

$$n + \frac{a-4}{8} = \frac{\pm\sqrt{(16A + \overline{a-4}^2)}}{8}$$

mithin

$$n = \frac{\sqrt{(16A + \overline{a - 4}^2)} - (a - 4)}{8}$$

Hier kann die Wurzelgröße nur positiv genommen werden, weil n positiv seyn muß.

Z. E. beym Barnikel S. 101. 102 der vierte Fall. Ein viereckichter Platz ist so groß, daß 576 Mann darauf stehen können. Wegen $\sqrt{576} = 24$ würden im Um-

fange dieses Vierecks $4 . 23 = 92$ Mann stehen. Es ist aber der Umfang des nächst größeren Vierecks der erste des Bataillon carré. Folglich ist nach N. 2, $a = 92 + 8 = 100$. Ferner sey $A = 450$: so ist $n = \frac{\sqrt{(16 . 450 + 96^2)} - 96}{8} = \frac{32}{8} = 4$. Die Probe giebt $A = 4 (100 + 4 . 3) = 448$ Mann, und 2 Mann bleiben übrig. Es sey $A = 1296$, $\alpha = 50$, so ist $a = 200 - 4 = 196$. Mithin $n = \frac{\sqrt{(16 . 1296 + 192^2)} - 192}{8} = \frac{48}{8} = 6$.

4) Endlich erhält man aus $A = na + 4n^2 - 4n$

$$a = \frac{A - 4n \cdot (n - 1)}{n}$$

Z. E. $A = 450$, $n = 4$, demnach $a = \frac{450 - 4 . 4 . 3}{4} = 100$, und $\alpha = \frac{1}{4} a + 1 = 26$ Mann.

Im andern Fall, wenn kein inneres Viereck der Größe nach gegeben ist, aber durch die Stellung der Mannschaft eines entstehet: so wird zuerst die Zahl der Soldaten im Umfange des äußersten Vierecks gesucht. Wenn also 1) in diesem Umfange b Soldaten stehen: so stehen ihrer im nächst kleinern $b - 8$ rc. also im

1sten	b	$= b - 8 (1 - 1)$
2ten	$b - 8$	$= b - 8 (2 - 1)$
3ten	$b - 16$	$= b - 8 (3 - 1)$
folglich im mten		$= b - 8 (m - 1)$

Also wie im ersten Fall, so daß nur die Zeichen + und − verwechselt werden. Daher ist die Menge aller Soldaten B in m Glieder

$$B = m (b - 4 . \overline{m - 1})$$

2) auch, wenn β Soldaten in der einen Seite des äußeren Vierecks Fronte machen, ist $\beta = \frac{b + 4}{4}$, $b = 4 (\beta - 1)$; mithin, wenn B aus m und β gesucht wird, ist

$$B = m (4 . \overline{\beta - 1} - 4 . \overline{m - 1})$$
$$= 4m (\beta - m)$$

3) aus $B = mb - 4m . \overline{m - 1}$ erhält man

$$b = \frac{B + 4m . \overline{m - 1}}{m}$$

$$\beta = \frac{B + 4m^2}{4m}$$

4) endlich, um m zu finden, erhält man ebensfalls aus

$$B = mb - 4m^2 + 4m$$

die

die unreine quadratische Gleichung

$$m^2 - m.\frac{b+4}{4} = -\frac{B}{4}$$

Für diese ist $m - \frac{b+4}{8} = \frac{\pm\sqrt{(\overline{b+4}^2 - 16B)}}{8}$

mithin $m = \frac{b+4-\sqrt{(\overline{b+4}^2 - 16B)}}{8}$

Hier kann die Wurzelgröße nur negativ genommen werden, weil die positive eine unmögliche Zahl Glieder gäbe.

Z. E. es sey $b = 124$, $m = 4$: so ist $B = 4\,(124 - 4.3) = 448$ Mann. Man setze $\beta = 100$, $m = 4$: so ist $B = 4.4\,(100 - 4) = 1536$ Mann. Wenn $B = 2000$ Mann, $m = 4$ Glieder oder 4 Mann hoch, welche Frage am meisten vorkommt: so ist $b = \frac{2000 + 16.3}{4} = 512$ Mann im Umfange des ersten Vierecks, $\beta = \frac{516}{4} = 129$, und also umgekehrt $B = 4.4\,(129 - 4) = 2000$ Mann.

Es sey $B = 448$, $b = 124$; so ist $m = \frac{126 - \sqrt{(\overline{128}^2 - 16.448)}}{8} = \frac{32}{8} = 4$.

II. Von der Stellung in einem Rechteck oder der länglichten Schlachtordnung. Hier gelten wenige allgemeine Umstände. Die erste Art der Aufgaben ist unter allen die gewöhnlichste. Man dividiret die Zahl aller Soldaten mit der Zahl der Soldaten in jedem Gliede: so ist der Quotient die Zahl der Glieder. Umgekehrt erhält man jene aus dieser.

Z. E. 150 Mann, in jedem Gliede 50 Mann, geben 3 Glieder. Bey 6 Gliedern kämen in eines 25 Mann. Oder beym Barnikel S. 101. Es sind 576 Mann in 3 Schwadronen, jede von 3 Gliedern zu stellen. Da kommen $\frac{576}{3} = 192$ Mann in jede Schwadron, und $\frac{192}{3} = 64$ Mann in jedes Glied.

Bey der andern Art kommt der innwendige Platz in Betrachtung, er sey gegeben, oder nicht. Hier kann nun a nicht mehr aus dessen einer Seite gefunden werden, sondern beyde ungleiche Seiten müssen gegeben seyn. Wenn also in zwey parallelen Seiten eines Rechtecks 2μ Mann, und in den andern beyden parallelen Seiten 2ν Fronte machen: so stehen im Umfange $2\,(\mu + \nu)$. Mithin muß durchgehends in den Formeln für das Viereck $2\,(\mu+\nu)$ anstatt a oder b gesetzt werden, und alles übrige bleibet.

Z. E. um das obige Viereck, worauf 576 Mann stehen können, sollen 485 Mann im Viereck gestellt werden. Es war aber $a = 100$ und $n = \frac{\sqrt{(16.485 + 96^2)} - 96}{8} = 4$.

$= 4$. Mithin umgekehrt, weil es nicht aufgehet, ist $A = 4\,(100 - 4 \cdot 3) = 448$ Mann. Da blieben aber 27 Mann übrig. Man stelle sie also rechtwinklicht in 4 Glieder: so ist $2\,(\mu + \nu) = a = \frac{485 - 16 \cdot 3}{4} = 109$ und $\mu + \nu = 54$ oder 55. Ist $\mu + \nu = 54$: so ist $A = 8\,(54 + 2 \cdot 3) = 480$, und es blieben 5 Mann übrig. Ist $\mu + \nu = 55$, so ist $A = 8\,(55 + 2 \cdot 3) = 488$, daß also nur 3 Mann fehlen. Im ersten Fall kann z. E. $54 = 30 + 24$, im andern $55 = 30 + 25$ gesetzt werden, oder jede andre geschickte Vertheilung gelten, wobey man sich nach dem einzuschließenden Rechteck zu richten hat.

Ein anderes Exempel. 1000 Mann in 4 Gliedern. Hier ist $B = 1000$, $m = 4$, folglich $2\,(\mu + \nu) = b = \frac{1000 + 16 \cdot 3}{4} = 262$. Probe: $262 + 254 + 246 + 238 = 1000$. Auch kann $\mu = 90$, $\nu = 41$ seyn.

Oder: 1800 Mann, in das erste Glied herum 300; wie viel Glieder? Hier ist $m = \frac{300 + 4 - \sqrt{(304^2 - 16 \cdot 1800)}}{8} = 6\frac{1}{2}$. Mithin umgekehrt $b = \frac{1800 + 4 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 320$. Probe: $320 + 312 + 304 + 296 + 288 + 280 = 1800$. Kämen nur 300 Mann in den Umfang des äußersten Rechtecks: so blieben bey 6 Gliedern 120 Mann übrig, bey 7 Gliedern aber fehlten 132 Mann. So viel sey zu einer Probe genung, um den Vorzug der Rechnung für den Gebrauch des Proportionalzirkels bey dergleichen Auflösungen zu bestätigen.

§. 6. 1 Aufgabe: Zwischen zwey gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Suchet die Verhältnis beyder Linien II §. 14, welche $a : b$ sey. Stellet auf der Lin. geom. die eine Linie überzwerch zwischen die Zahl a, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen der Zahl b: so ist diese die Länge x der gesuchten Linie. Denn auf der Lin. geom. sind die Längen, bey welchen die Zahlen a, b stehen, $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$. Mithin ist vermöge des Verfahrens $\sqrt{a} : \sqrt{b} = a : x$, demnach $a : b = a^2 : x^2$ d. i. $1 : b = a : x^2$, folglich $ab = x^2$, wie vermöge der Bedingung $a : x = x : b$ gefunden werden sollte.

§. 7. Zusätze.

I. Folglich ist die Auflösung dieser Aufgabe mit derjenigen einerley, nach welcher Tab. IV Fig. 1 ein gegebenes Rechteck CB in ein Viereck verwandelt werden soll. Es sey $AB : AC = 16 : 64$. Stellet also AB auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 16, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 64: so ist die ihr gleiche CD die Seite des gesuchten Vierecks von 32 Theilen, dergleichen AB 16 und AC 64 hat.

II. Auf

II. Auf diese Art kann man zwar zwischen zwey Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl aber nur für solche finden, die der Proportionalzirkel erlaubet. Und weil diese noch dazu in den meisten Fällen keine ganze Zahl ist: so ist einer solchen unsichern Auflösung die arithmetische allemal vorzuziehen. Z. E. zwischen 15 und 96 ist $15 \times 96 = 1440$ und $\sqrt{1440} = 38$, ohne einen großen Fehler; aber zwischen 15 und 100 ist $\sqrt{1500} = 38, 729$ u. s. w.

III. Man kann daher sagen, eine Zahl a auf der Lin. arithm. gerade nehmen, und auf der Lin. geom. zwischen a überzwerch stellen, sey so viel, als a quadriren. Denn dieser Linien Verhältnis ist $\sqrt{a} : a$; die Weite x aber unverrückt zwischen b auf der Lin. geom. überzwerch nehmen, und auf der Lin. arithm. gerade messen, sey so viel, als aus ab die Quadratwurzel x ausziehen. Denn dieser Linien Verhältnis ist $\sqrt{b} : x$, folglich, weil a, b bey einerley Oeffnung überzwerch gestellt werden, und also parallel sind, beyde Verhältnisse gleich, oder $\sqrt{a} : a = \sqrt{b} : x$, welches, wie §. 6, $a : x = x : b$ giebt.

§. 8. 2 Aufgabe: Ueber einer gegebenen geraden Linie ein Viereck zu beschreiben.

Auflösung. Beschreibet mit der Seite EF Tab IV Fig. 2 aus E einen Bogen. Stellet EF auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine Zahl, die nicht über 50 gehe, z. E. 10. Nehmet unverrückt überzwerch die Weite zwischen der doppelten Zahl der angenommenen, also zwischen 20: so ist diese die Diagonale des Vierecks, oder, nach den alten Geometern, sein Durchmesser, weil sie das Viereck halbiret. Mit dieser Weite beschreibet aus F einen Bogen, der den vorigen in G durchschneide. Vollendet das Viereck.

Beweis. Es sey $EF = EG = a$, $FG = x$, demnach vermöge des Verfahrens $\sqrt{10} : \sqrt{20} = a : x$, und also $10 : 20 = a^2 : x^2 = 1 : 2$, mithin $2a^2 = x^2$, d. i. $2EFq = EFq + EGq = FGq$, folglich der Winkel GEF ein rechter, nach Euclid. I B. 48 S.

Oder aber, weil $2a : x = x : a$; so ist die Diagonale eines Vierecks die mittlere Proportionallinie zwischen dessen einfachen und doppelten Seite. Auch ist sie die Seite des doppelten Vierecks.

Die Rechnung giebt z. E. für $a = 12$, $a^2 = 144$, $2a^2 = 288$ und $\sqrt{2a^2} = x = 17$ ohne einen merklichen Fehler.

§. 9. 3 Aufgabe: Die Diagonale eines Rechtecks zu finden.

Auflösung. Das Rechteck sey HILK, Tab. IV Fig. 3. Stellet die eine Seite $HK = a$ überzwerch auf der Lin. geom. zwischen eine beliebige Zahl m. Stellet unverrückt durch Versuche die andere Seite $HI = b$ auch überzwerch, und sie treffe zwischen die Zahl n. Addiret die Zahlen m, n, und es sey $m + n = q$. Nehmet unverrückt die Weite zwischen der Zahl q überzwerch: so ist diese die gesuchte Diagonale IK.

Beweis. Vermöge des Verfahrens ist $\sqrt{m} : \sqrt{n} = a : b$ und $\sqrt{q} : \sqrt{n} = x : b$.

Folglich $m : n = a^2 : b^2$
mithin $m + n : n = a^2 + b^2 : b^2$
Und eben so $q : n = x^2 : b^2$
Demnach $m + n : q = a^2 + b^2 : x^2$

Allein $m + n = q$, folglich $a^2 + b^2 = x^2$ d. i. $HKq + HIq = IKq$, also der Winkel KHI ein rechter, und IK die gesuchte Diagonale, wie §. 8. Es sey $a = 24$, $b = 18$, so ist $a^2 + b^2 = 576 + 324 = 900 = x^2$, folglich $x = 30$. Wird a zwischen 60 gestellt, so trifft HI zwischen 34, und es ist $60 + 34 = 94$. Die Weite zwischen 94 auf der Lin. arithm. gerade gestellt, giebt $x = 30$. Wenn also z. E. ein Thurm 50 Ellen hoch ist, um ihn ein Graben, der 18 Ellen breit sey, und eine Leiter außerhalb dem Graben angelehnt werden soll, die den Thurm in einer Höhe von 24 Ellen erreichen soll: so muß die Leiter 30 Ellen lang seyn.

Anders vermittelst der Lin. arithm. Oeffnet die Lin. arithm. nach einem rechten Winkel II §. 18. Suchet die Verhältnis KH : HI, II §. 14; welche 24 : 18 sey. Nehmet auf ihr schief die Weite zwischen 24 und 18: so ist diese gerade genommen 30 = IK.

§. 10. 4 Aufgabe: Aus der einen gegebenen Seite eines Rechtecks und seiner Diagonale, die andere Seite zu finden.

Auflösung. Stellet die gegebene Diagonale KI = c überzwerch auf der Lin. geom. zwischen eine beliebige Zahl q. Versuchet unverrückt, in welche Zahl n sich HI = b überzwerch stellen lasse. Ziehet n von q ab, und es sey $q - n = m$. Nehmet unverrückt die Weite zwischen m überzwerch: so ist diese die gesuchte andere Seite HK = y.

Beweis. Es ist, wie im Beweise §. 9, vermöge des Verfahrens $\sqrt{q} : \sqrt{n} = c : b$ und $\sqrt{m} : \sqrt{n} = y : b$. Folglich

$q : n = c^2 : b^2$
mithin $q - n : n = c^2 - b^2 : b^2$
und eben so $m : n = y^2 : b^2$
Demnach $q - n : m = c^2 - b^2 : y^2$

Daher ist wegen $q - n = m$, auch $c^2 - b^2 = y^2$, und $c^2 = b^2 + y^2$ d. i. $KIq = HIq + HKq$, also der Winkel KHI ein rechter. Für $c = 30$, $b = 18$ ist $c^2 - b^2 = 900 - 324 = 576 = y^2$ und $\sqrt{576} = 24 = y$. Wird c zwischen 94 gestellt, so trifft HI zwischen 34, und es ist $94 - 34 = 60$. Die Weite zwischen 60 auf der Lin. arithm. gerade gestellt, giebt $y = 24$.

Anders, vermittelst der Lin. arithm. Oeffnet die Lin. arithm. nach einem rechten Winkel II §. 18. Suchet die Verhältnis KI : HI, II §. 14, welche 30 : 18 sey. Nehmet auf ihr gerade 30. Setzet den einen Fuß des Zirkels in 18: so trifft der andere schief auf 24, so daß KH = 24.

Ist aber KI : KH = 30 : 24 gegeben: so nehmet auf der Lin. arithm. gerade 30. Setzet den einen Fuß des Zirkels in 24: so trifft der andere schief auf 18, so daß HI = 18.

* Diese Aufgabe wird auch so ausgedrückt: aus der gegebenen Hypothenuse und Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyecks das Loth zu finden; da denn eben so aus der Hypothenuse und dem Loth die Grundlinie gefunden wird: folglich nicht erst zwey besondere Aufgaben daraus gemacht werden dürfen. Ist also im Ex. §. 9, 1) die Länge der Leiter von 30 Ellen, und die Weite 18 Ellen vom Thurm gegeben: so erreicht sie ihn in einer Höhe von 24 Ellen. Ist aber 2) die Länge der Leiter von 30 Ellen, und die Höhe von 14 Ellen gegeben, wo sie den Thurm erreichen soll: so muß sie in einer Weite von 18 Ellen angelegt werden.

§. 11. Anmerkungen.

I. Scheffelt nimmt hierbey noch folgende Aufgabe mit, welche aber vermittelst der Lin. arithm. aufgelöst wird: ein Baum ist 108 Fuß hoch, welcher so weit abgehauen werden soll, daß sein Gipfel vom Stamme 36 F. weit falle: in welcher Höhe soll der Baum gebrochen werden? Es sey Tab. IV Fig. 4, AC = 108, AB = 36. Mithin wird ein Punct D in AC gesucht, so daß DC = DB sey. Oeffnet daher die Lin. arithm. nach einem rechten Winkel, II §. 18. Stellet den einen Fuß des Handzirkels in 36, und den andern schief in eine größere Zahl, z. E. 60. Lasset diesen Fuß in der Zahl 60 stehen, und sehet, wohin der erste Fuß weiter gerade hintreffe, z. E. in 130. Es ist also die Weite des Handzirkels zu groß. Versuchet daher so lange, bis beym zweyten Umschlagen der Punct 108 getroffen werde: so trifft der eine Fuß in 48, so daß CD = DB = 60 ist.

II. Diese Aufgabe, allgemein genommen, ist folgende: **über die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks ein gleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben, dessen Spitze in eine von den Seiten um den rechten Winkel treffe.** Man siehet hier aus Tab. IV Fig. 5 sehr leicht ein, daß die Spitze D eines solchen gleichschenklichten Dreyecks CDB in die größere Seite CA des rechtwinklichten Dreyecks CAB treffen müsse, weil nur der ihr anliegende kleinere Winkel C einer von den gleichen Winkeln an der Grundlinie CB des gesuchten Dreyecks seyn kann; mithin die Auflösung für ein gleichschenklichtes rechtwinklichtes Dreyeck unmöglich sey. Dieses vorausgesetzt, so sey AC = a, AB = b, CB = c, CD = DB = x: so ist DA = a − x. Demnach

$$DBq = DAq + ABq$$
$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2$$

allein

$$CBq = CAq + ABq$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

folglich

$$x^2 = c^2 - 2ax + x^2$$

also

$$x = \frac{c^2}{2a}$$

und

$$2a : c = c : x$$

Das gesuchte Stücke der größeren Seite also ist die dritte Proportionallinie zu der doppelten größeren Seite und der Hypothenuse. Welches eine sehr leichte geometrische Auflösung ist.

Für

Für die arithmetische war in Scheffelts Ex. $a = 108$, $b = 36$. Folglich

$$a^2 = 11664$$
$$b^2 = 1296$$
$$a^2 + b^2 = c^2 = 12960$$

und $\frac{c^2}{2a} = \frac{12960}{216} = 60 = x = CD$, demnach $a - x = 108 - 60 = 48 = DA$.

§. 12. Zusammenhängende Uebersicht der Regeln von Berechnung des Inhalts geradelinichter Figuren.

I. Wenn Tab. IV Fig. 6 das Viereck EFq zur Einheit angenommen wird, dessen Seite EF sich zu der einen Seite GH eines Rechtecks GHKI, wie $1 : a$, und zu desselben andern Seite GI, wie $1 : b$ verhält: so ist, vermöge Euclid. VI B. 23 S. Schol. 4 der Bärmannischen Ausgabe,

$$GHKI : EFq = (GH : EF) + (GI : EF) = (a : 1) + (b : 1) = ab : 1$$

Demnach ist der Inhalt eines Rechtecks GHKI, oder, weil es durch seine Seiten GH, GI bestimmt wird, welches man so ausdrückt $GH \times GI = ab \times EFq$, wo also im Ausdruck $GH \times GI$ das Zeichen $\times$ keine Multiplication bedeutet. Auch ist, weil EFq die Einheit ist, $GH \times GI = a \times b$; daher man sagen kann, der Inhalt eines Rechtecks komme heraus, wenn man seine Grundlinie mit der Höhe multipliciret. D. h. wenn a, b Zahlen sind, welche angeben, wie oft ein gegebenes Längenmaß EF in beyden Seiten GH, GI eines Rechtecks enthalten sind: so ist das Produkt aus diesen Zahlen ab eine Zahl, welche angiebt, wie oft das Viereck dieses Längenmaßes, oder das Flächenmaß EFq in einem Rechteck enthalten sey. Es sey z. E. EF 1 Fuß, $a = 8$, $b = 10$: so ist $ab = 80$, und der Inhalt $80 \times EFq = 80$ Quadratfüssen.

II. Beym Viereck Tab. IV Fig. 7 ist $LM = LN$, und es sey $EF : LN = EF : LM = 1 : a$. Folglich ist, vermöge des vorigen,

$$LMq : EFq = (LM : EF) + (LN : EF) = (a : 1) + (a : 1) = a^2 : 1$$

Daher ist der Inhalt eines Vierecks $LMq = a^2 \times EFq$, oder, weil EFq die Einheit ist, $LMq = a^2$. Auch ist eben so $LM \times LM = a \times a = a^2$; weswegen man sagen kann, der Inhalt eines Vierecks komme heraus, wenn man seine Seite mit ihr selbst multipliciret; d. h. wenn a eine Zahl ist, welche angiebt, wie oft ein gegebenes Längenmaaß EF in einer gegebenen Linie LM enthalten sey: so ist a^2 eine Zahl, welche angiebt, wie oft das Viereck dieses Längenmaaßes, oder das Flächenmaaß EFq in dem Viereck der andern gegebenen Linie LMq enthalten sey. Ist z. E. nach EF 1 Fuß, LM eine Ruthe, also $a = 10$ oder 12: so ist EFq ein Quadratfuß, und wegen $a^2 = 100$, der Inhalt von LMq einer Quadratruthe $= 100$ Quadratfüßen, oder für $a = 12$, wegen $a^2 = 144$, von so viel Quadratfüßen.

III. Weil alle Parallelogramme, die einerley oder gleiche Grundlinie haben und zwischen einerley Parallellinien liegen, einander gleich sind, Euclid. I B. 35. 36 S. so ist jedes

schiefe

schiefe Parallelogramm einem Rechteck gleich, welches mit ihm einerley oder gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien liegt. Da nun Tab. IV Fig. 8. die Höhe RT eines schiefen Parallelogramms NOSR, das mit dem Rechteck NOPQ einerley Grundlinie NO hat, der andern Seite NQ des Rechtecks gleich ist, d. i. NO × NQ = NO × RT: so erhält man den Inhalt eines jeden schiefen, folglich eines jeden Parallelogramms, wenn man in dem Verstande wie N. I gewiesen worden, seine Grundlinie mit der Höhe multipliciret.

IV. Folglich sind alle halbe Parallelogramme, mithin alle Dreyecke Euclid. I B. 34 S. einem halben Rechteck, d. i. einem rechtwinklichten Dreyeck gleich, das mit ihnen einerley oder gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien liegt, Euclid. I 37. 38 S. Da nun RT die Höhe des schiefwinklichten Dreyecks NRO der Höhe QN des rechtwinklichten Dreyecks QNO d. i. der andern Seite des Rechtecks NOPQ gleich ist, welches dem schiefen Parallelogramm NOSR gleich ist: so ist der Inhalt eines jeden schiefwinklichten, folglich eines jeden Dreyecks einem halben Rechteck gleich, dessen eine Seite der Grundlinie des Dreyecks, die andere aber seiner Höhe gleich ist; welchen man also erhält, wenn man in dem Verstande, wie N. I gewiesen worden, das Product aus der Grundlinie in die Höhe halbiret, oder die halbe Grundlinie mit der Höhe, oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multipliciret.

V. Jede andere geradlinichte Figur von n Seiten läßt sich durch n – 3 Diagonalen in n – 2 Dreyecke eintheilen. Die Summe des vermöge N. IV. gefundenen Inhalts aller dieser Dreyecke ist der Inhalt der Figur.

VI. Endlich ist der Inhalt eines jeden ordentlichen Vielecks dem Inhalt eines Dreyecks gleich, dessen Grundlinie dem Umfange des Vielecks gleich ist, die Höhe aber einer senkrechten Linie, die aus dem Mittelpuncte des Kreises, welcher um das Vieleck sich beschreiben läßt, auf eine Seite desselben gefällt werden kann.

* Hieraus erhellet also, daß die Berechnung des Inhalts aller geradlinichten Figuren die N. I gewiesene Erfindung des Inhalts eines Rechtecks zum Grunde habe, und alles übrige daraus herfließe; so wie in allen Anfangsgründen der Geometrie gelehrt wird, wie ferner die Berechnung des Inhalts eines Kreises, Ausschnitts und Abschnitts auf der Berechnung des Inhalts eines Dreyecks beruhe.

§. 13. 5 Aufgabe: Die Verhältnis von zwey ähnlichen Figuren gegen einander zu finden.

Auflösung. I Fall. Wenn der Inhalt der einen Figur gegeben ist. Es sey z. E. Tab. IV Fig. 9 der Inhalt des Dreyecks A 12 Quadratruthen. Stellet dessen eine Seite auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 12, nehmet eine ähnlich liegende Seite des andern Dreyecks B, und suchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie sich überzwerch stellen lasse. Sie sey 15: so ist A : B = 12 : 15 = 4 : 5, und der Inhalt des Dreyecks B 15 Q. R.

II Fall. Wenn bey beyden Figuren nichts gegeben ist. Stellet eine beliebige Seite z. E. des einen Dreyecks B auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 90. Nehmet eine ähnlich liegende Seite des andern Dreyecks A, und suchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie sich überzwerch stellen lasse. Sie sey 72. Folglich ist A : B = 72 : 90 = 4 : 5.

Beweis. Wenn beyde ähnlich liegende Seiten a, b heißen: so ist in beyden Fällen

$$a : b = \sqrt{12} : \sqrt{15} = \sqrt{72} : \sqrt{90}$$

$$a^2 : b^2 = 12 : 15 = 72 : 90$$

Allein $A : B = a^2 : b^2$ Euclid. VI, 19 S.

Folglich $A : B = 12 : 15 = 72 : 90 = 4 : 5.$

Durch die Rechnung. Auf einem verjüngten Maaßstabe gemessen, sey $a = 20'' = 2000'$, $b = 22°3'6''$: so ist $a^2 : b^2 = 4000000 : 4999696 = 4 : 5$ ohne einen merklichen Fehler. Und so gilt diese Auflösung für alle Arten ähnlicher Figuren.

§. 14. 6 Aufgabe: Aehnliche Figuren zu addiren, d. h. eine Figur zu zeichnen, welche mehreren ähnlichen Figuren zusammengenommen, gleich und ähnlich sey.

Auflösung. Man suchet z. E. ein Dreyeck Tab. IV Fig. 10, welches drey ähnlichen gegebenen C, D, E zusammengenommen gleich und ähnlich sey. Nehmet eine beliebige Seite des einen Dreyecks C, und stellet sie auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 8. Nehmet eine ähnlich liegende Seite des zweyten Dreyecks D, und suchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie sich überzwerch stellen lasse. Sie sey 16. Eben so lasse sich noch unverrückt die ähnlich liegende Seite des Dreyecks E überzwerch zwischen 26 stellen. Addiret diese 3 Zahlen 8 + 16 + 26 = 50. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 50 überzwerch: so ist diese die ähnlich liegende Seite eines Dreyecks F, welches, wenn es vollendet wird, den 3 gegebenen zusammengenommen gleich ist.

Beweis. Es ist, wie im Beweise §. 13,

$C : D = 8 : 16$ Demnach $C + D : C = 8 + 16 : 8$

$D : E = 16 : 26$ $\quad C : E = 8 : 26$

$E : F = 26 : 50$ $\quad C + D : E = 8 + 16 : 26$

$$C + D + E : E = 8 + 16 + 26 : 26$$

$$E : F = 26 : 50$$

$$C + D + E : F = 8 + 16 + 26 : 50$$

Da nun 8 + 16 + 26 = 50, so ist auch C + D + E = F.

Durch die Rechnung. Auf einem verjüngten Maaßstabe gemessen, mögen die ähnlich liegenden Seiten von C 2°, D 2°8'3'', E 3°6'0'5'' seyn. Mithin verhalten sich diese Seiten wie 2000:2830:3605, und ihre Quadratzahlen wie 4000000:8008900:12996025, beynahe

beynahe wie 4 : 8 : 13 oder 8 : 16 : 26. Dieser Quadratzahlen Summe ist 25004925, dieser Zahl Quadratwurzel ist 5000, ohne einen merklichen Fehler, welches also die ähnlich liegende Seite des Dreyecks F von 5° giebt. Endlich verhält sich auch diese Summe zu den 3 Quadratzahlen beynahe wie 25 : 13 : 8 : 4, oder wie 50 : 26 : 16 : 8.

§. 15. 7 Aufgabe: Aehnliche Figuren abzuziehen, d. h. eine Figur zu finden, deren Inhalt dem Unterschiede des Inhalts zweyer ähnlichen Figuren gleich und ihnen ähnlich seyn.

Auflösung. Man suchet z. E. Tab. IV Fig. 11 ein Dreyeck, welches dem Unterschiede des Inhalts beyder Dreyecke F, E gleich und ihnen ähnlich sey. Stellet eine beliebige Seite des einen Dreyecks F überzwerch auf der Lin. geom. zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 50. Nehmet die ähnlich liegende Seite des andern Dreyecks E, und suchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie überzwerch treffe. Sie sey 26. Ziehet diese Zahl von jener ab, so ist 50 – 26 = 24. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 24 überzwerch: so ist diese die ähnlich liegende Seite eines Dreyecks G, welches, wenn es vollendet wird, dem Unterschiede beyder gegebenen Dreyecke gleich ist.

Beweis. Es ist, wie im Beweise §. 13,

$$F : E = 50 : 26$$
$$F - E : E = 50 - 26 : 26$$
$$\underline{E : G = 26 : 24}$$
$$F - E : G = 50 - 26 : 24$$

Da nun 50 – 26 = 24, so ist auch F – E = G.

Durch die Rechnung. Auf einem verjüngten Maaßstabe gemessen, mögen die ähnlich liegenden Seiten von F 5°, E 3°6'0"5''' seyn. Mithin verhalten sich diese Seiten wie 5000 : 3605, und ihre Quadratzahlen wie 25000000 : 12996025, beynahe wie 25 : 13 oder wie 50 : 26. Dieser Quadratzahlen Unterschied ist 12003975, dieser Zahl Quadratwurzel ist 3465, daß also die ähnlich liegende Seite von G 3°4'6"5''' beträgt. Endlich verhält sich auch dieser Unterschied zu beyden Quadratzahlen beynahe wie 12 : 13 : 25 oder wie 24 : 26 : 50.

§. 16. 8 Aufgabe: Eine Figur zu multipliciren, d. h. eine Figur zu finden, welche einer gegebenen ähnlich, und von ihr ein Vielfaches sey.

Auflösung. Man soll z. E. ein gleichseitiges Dreyeck zeichnen, das dreymal so groß, als ein gegebenes gleichseitiges Dreyeck sey. Stellet die Seite des Dreyecks H Tab. IV Fig. 12 auf der Lin. geom. zwischen eine Zahl überzwerch, deren dreyfache nicht über 100 gehe, z. E. zwischen 10. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 30 überzwerch: so ist diese der Seite des dreyfachen Dreyecks I gleich.

Beweis. Die Seiten beyder Dreyecke mögen h, i seyn: so ist vermöge des Verfahrens $h : i = \sqrt{10} : \sqrt{30}$, demnach $h^2 : i^2 = 10 : 30$. Allein $H : I = h^2 : i^2$, folglich $H : I = 10 : 30 = 1 : 3$.

Durch die Rechnung. Es sey $h = 4^\circ$, demnach $h^2 = 16^{\circ q}$ und $i^2 = 3 \cdot 16^{\circ q} = 48^{\circ q} = 480000'^q$, folglich $i = 6^\circ 9' 3''$.

§. 17. 9 Aufgabe: Eine gegebene Figur zu verjüngen, d. h. eine Figur zu finden, welche einer gegebenen Figur ähnlich und von ihr ein Vieltheilichtes sey.

Auflösung. Man soll z. E. ein gleichseitiges Dreyeck zeichnen, das dreymal so klein, als ein gegebenes gleichseitiges Dreyeck sey. Stellet die Seite des Dreyecks I in voriger Figur auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine Zahl, die sich mit 3 dividiren läßt, z. E. zwischen 30. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 10 überzwerch: so ist diese der Seite des dreymal kleinern Dreyecks H gleich. Der Beweis ist einerley mit dem von der vorigen Aufgabe.

Durch die Rechnung. Es sey der Inhalt des gleichseitigen Dreyecks $I = 16^{\circ q}$, also $\frac{16}{3}^{\circ q} = 5^\circ 33' 33''^q$, folglich $\sqrt{5^\circ 33' 33''^q} = 2^\circ 3' 1'' = h$ der Seite des gleichseitigen Dreyecks H, welche $\frac{1}{3}$ I ist.

§. 18. Einige einzele Fälle zu beyden vorigen Aufgaben.

I. Ein Viereck zu vergrößern oder zu verjüngen. Es soll z. E. von KLq Tab. IV Fig. 13, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ gefunden werden. Stellet KL auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine Zahl, die sich mit 2, 3, 4 dividiren läßt, z. E. zwischen 60. Nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 30 für KM, zwischen 20 für KN, zwischen 15 für NO. Mithin ist

$$KL : KM : KN : KO = \sqrt{60} : \sqrt{30} : \sqrt{20} : \sqrt{15}$$
$$KLq : KMq : KNq : KOq = 60 : 30 : 20 : 15$$
$$= 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4}$$

Auf eben diese Art wird KOq um $\frac{1}{3}$, 2, 4mal vergrößert.

Durch die Rechnung. Es sey $KL = 60'$, folglich ist

$KLq = 3600'^q$	also	$KL = \sqrt{3600} = 600''$
$KMq = 1800$		$KM = \sqrt{1800} = 424$
$KNq = 1200$		$KN = \sqrt{1200} = 345$
$KOq = 900$		$KO = \sqrt{900} = 300$

II. Ein ungleichseitiges Dreyeck zu vergrößern oder zu verjüngen. Um es zu vergrössern, so verlängert eine seiner Seiten, z. E. Tab. IV Fig. 14 die Seite PQ des gegebenen Dreyecks PQS in R. Man suchet die Seite des doppelten. Stellet PQ überzwerch zwischen eine Zahl, deren Doppeltes nicht größer als 100 ist, z. E. zwischen 10. Nehmet unverrückt auch

auch überzwerch die Weite zwischen 20 = 2 × 10, und machet ihr die verlängerte PR gleich. Verlängert PS, und ziehet durch R mit QS die Parallellinie RT: so ist das Dreyeck PRT = 2 × PQS. Denn es sind beyde Dreyecke ähnlich, aus Euclid. VI B. 4 S. mithin

$$PQS : PRT = PQq : PRq$$
$$PQ : PR = \sqrt{10} : \sqrt{20}$$
$$PQq : PRq = 10 : 20$$
$$PQS : PRT = 10 : 20 = 1 : 2$$

Für die Verjüngung wird aus der gegebenen Seite PR die Seite des verjüngten PQ eben so gefunden.

III. Weil sich Kreise wie die Vierecke ihrer Durchmesser, folglich auch wie die Vierecke ihrer Halbmesser verhalten: so findet man den Halbmesser des 2, 3, 4, 5fachen gegebenen Kreises, dessen Halbmesser Tab. IV Fig. 15 AB ist, wenn man AB zwischen eine beliebige Zahl stellet, deren größte gegebene vielfache nicht über 100 beträgt, z. E. zwischen 10, und unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 20, 30, 40, 50 nimmt, welchen die gesuchte Halbmesser AC, AD, AE, AF gleich sind. Eben so findet man umgekehrt die Halbmesser der Kreise, die eines gegebenen Kreises, dessen Halbmesser AF ist, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ sind.

IV. Aehnliche Ausschnitte der Kreise (Sectores) verhalten sich ebenfalls wie die Vierecke ihrer Halbmesser. Soll also Tab. IV Fig. 16 der Ausschnitt, dessen Halbmesser GH ist, verdoppelt werden, oder ein ihm ähnlicher gedoppelter Ausschnitt gefunden werden: so stellet GH überzwerch zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 10, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 20 = 2 × 10: so ist der ihr gleiche Halbmesser GI der gesuchte.

V. Ueberhaupt wird jede noch so unordentliche Figur auf diese Art vergrößert oder verjüngt, z. E. Tab. IV Fig. 17 die Figur KLMNOP, um die Hälfte. Ziehet von der Spitze eines beliebig angenommenen Winkels K Diagonalen KM, KN, KO. Stellet eine von diesen Linien oder KL, KP nach der andern überzwerch, z. E. zwischen 20, und unverrückt nehmet überzwerch für jede die Weite zwischen 10. Traget diese Weiten ab aus K in l, m, n, o, p: so ist die Figur Klmnop = $\frac{1}{2}$ KLMNOP.

* Mit dieser Materie hängt der Gebrauch des itzt so beliebten Storchschnabels zusammen.

§. 19. Arithmetische Auflösung einiger hieher gezogenen Aufgaben.

Scheffelt und Barnikel bringen hier noch einige Aufgaben bey, an welche aber Goldmann und andere nicht gedacht haben. Es ist nicht überflüßig zu zeigen, wie solche Fälle, anstatt einer ermüdenden Anwendung des Proportionalzirkels zu berechnen sind.

I. Bey Feldern von gleicher Güte ist der Werth ihrer Größe proportional. Z. E. für ein viereckichtes Feld, welches 3 R. lang und breit ist, werden 3 Fl. Miethe gezahlt: wie viel für eines, welches $3\frac{1}{2}$ R. lang und breit ist? Die Längen sind 3 R. und $3\frac{1}{2}$ R. Folglich beyder Inhalt $3 \times 3 = 9$ Qu. R. und $3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{4}$ Qu. R. Mithin $9 : 12\frac{1}{4} = 3 : 4\frac{1}{12}$ Fl.

* Barnikel nimmt zwey Stücke Leder, und lehret den Schuster den Preis mit dem Proportionalzirkel in der Hand suchen.

II. Ein Tischler kauft ein Dielenstück Eichenholz, welches 16 F. lang und 1 F. breit ist, um 16 Gr., wie viel ist ein gleich dickes werth, welches 12 F. lang und 2 F. 1 Z. breit ist? Hier rechne man also:

$$16 \times 1 : 12 \times 2\tfrac{1}{12} = 16 : x$$

d. i. $$16 : 25 = 16 : 25 \text{ Gr.}$$

Es sind nehmlich zwey solche gleich dicke Dielenstücke eigentlich Parallelepipeda, die sich daher wie ihre Grundflächen verhalten, Euclid. XI B. 32 S. Die Grundflächen aber sind Rechtecke, deren Inhalt nach §. 12 N. I gefunden wird.

III. Noch eine Aufgabe nach dem Scheffelt: wenn eines Kreises Durchmesser 7, sein Inhalt $38\frac{1}{2}$ ist, den Inhalt eines Kreises zu finden, dessen Durchmesser 8 ist.

Das heißt nun eigentlich so viel. Wenn man, nach dem Archimedes, dem Durchmesser eines jeden Kreises 7 Theile giebt: so hat sein Umfang, als eine gerade Linie betrachtet, beynahe 22 solcher Theile. Folglich hat das Viereck des Durchmessers 49 solcher Quadrattheile, §. 12 N. II, und der Inhalt der Kreisfläche selbst $\frac{22 \cdot 7}{4} = 38\frac{1}{2}$ solcher Quadrattheile, dessen jedes Seite $\frac{1}{7}$ des Durchmessers ist. Da nun alle Vierecke und Kreise einander ähnlich sind: so sind die Verhältnisse beständig

des Durchmessers zum Umfang = 7 : 22
des Kreises zum Viereck seines Durchmessers = $38\frac{1}{2} : 49$

Nach dem Ludolph van Ceulen ist, wie bekannt, noch genauer die erste Verhältnis = 100 : 314, folglich die andere = 7850 : 10000. Dieses vorausgesetzt, so ist im Ex.

$$7 \times 7 : 38\tfrac{1}{2} = 8 \times 8 : 50\tfrac{2}{7}$$

```
oder 10000 : 64 = 7850 :
                    64
                  ----
                  3140
                 4710
                 -----
      10000) 502400 f 50 6/25
```

Es sey der Inhalt eines Kreises 28 Qu. F., man sucht den Durchmesser?

```
Demnach 7850) : 10000 = 28 :
              ) 28.0.000 f 35'67''9 f 59'''.
              2355.        |
              -----        |
               4.45.0   25 |
                        ---|
               3925     10 |67
                5.250    6 |0)9
                4710     9 |81
                ----     ------
                 5400
                 5495
```

IV. End-

IV. Endlich folgendes Ex. Zwey Nachbarn haben in ihre Häuser eine Wasserleitung angelegt, welche 150 Fl. kostet, im Durchmesser 2 Zoll hat, und 90 Quart Wasser in 1 St. giebt. Wenn nun der eine nur 50 Fl. dazu beygetragen hat, also der andere 100 Fl., so fragt es sich, wie groß der Durchmesser der Röhren für beyder Antheil seyn dürfe? Hier ist nach der Gesellschaftsrechnung

$$\frac{150}{3} : \frac{100}{2} = 4''00'''^{q} :$$

$$3)\overline{800}\ 266'''^{q} \text{ und } \sqrt{266} = 1''6''' \text{ dem einen Durchmesser}$$

2 / 222

$$\frac{150}{3} : \frac{50}{1} = 400'''^{q} :$$

$$3)\overline{133} \text{ und } \sqrt{133} = 1''1''' \text{ dem andern Durchmesser}$$

Und für die Menge des Wassers in 1 St. ceteris paribus,

3 : 2 = 90 : 60 Quart für den einen

3 : 1 = 90 : 30 Quart für den andern.

§. 20. Anmerkung wegen folgenden Aufgaben.

Die Lehre von Eintheilung der Figuren ist eine der nützlichsten. Hiervon findet man vieles in alten und neuen, theoretischen und practischen Schriftstellern, aber zerstreuet. Die leichtesten Aufgaben hat OZANAM im Traité de la Division des Champs, welcher dem in der histor. Einl. angezeigten Usage du Compas du Proportion beygefügt ist, auch besonders übersetzt, Nürnb. 1767, Oct. herausgekommen, gesammlet und strenge erwiesen. Vornehmlich gehöret hieher CHR. HEINR. WILKENS neue und erleichterte Methode, den Inhalt geradelinichter Flächen zu finden, und dieselben ohne Rechnung einzutheilen, Leipz. 1757, Qu. nebst dessen abgenöthigten Vertheidigung bey den neuen Grundsätzen der practischen Geometrie, Halle 1758, Qu. und das von ihm angeführte seltne Werk LUDOLPHI A CEULEN Fundamenta arithmetica et geometrica in holländ. Sprache, Leyden 1615, klein Fol. übers. ins Latein. von Wil. Sn. (d. i. WILLEBRORDO SNELLIO) auch schon 1615, ebendas. in Med. Qu. Man kann hoffen, daß Herr Prof. JOH. TOB. MAYER in der zu erwartenden Fortsetzung seiner vortreflichen practischen Geometrie dieser Materie die vollkommenste Genüge leisten werde. Scheffelt hat folgende Aufgaben mitgenommen.

§. 21. 10 Aufgabe: Ein Dreyeck aus der Spitze eines gegebenen Winkels in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey z. E. Tab. IV Fig. 18 das Dreyeck ABC aus der Spitze B des Winkels ABC in 3 gleiche Theile zu theilen. Theilet mit Hülfe der Lin. arithm. die dem gegebenen

gegebenen Winkel ABC gegenüber liegende Seite in 3 gleiche Theile, II Abschn. §. 10, und ziehet die Theilungspuncte mit dessen Spitze zusammen, vermöge Euclid. VI B. 1 S.

§. 22. Zusätze.

I. Eben so wird jedes Parallelogramm DEFG Tab. IV Fig. 19 durch Parallellinien mit der einen Seite DG in so viel gleiche Theile getheilt, als in so viele die andere Seite DE getheilt worden.

II. Wenn ein Trapezium HIKL, Tab. IV Fig. 20, welches zwey parallele Seiten HI, KL hat, in gleiche Theile getheilt werden soll: so theile man ebenfalls vermittelst der Lin. arithm. diese beyden parallelen Seiten in gegebene gleiche Theile, und ziehe die Theilungspuncte zusammen. Denn wegen HM = MN = NI ist das Dreyeck HLM = MPN = NOI, und wegen LP = PO = OK ist das Dreyeck LMP = PNO = OIK; folglich in der Ordnung zusammengenommen das Trapez. HP = MO = NK = $\frac{1}{3}$ HK.

§. 23. 11 Aufgabe: Ein Dreyeck durch Linien, die einer gegebenen Seite desselben parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey Tab IV Fig. 21, das Dreyeck ABC durch Linien, die der Seite CB parallel sind, in drey gleiche Theile zu theilen. Stellet eine der beyden übrigen Seiten, z. E. AB, auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine Zahl, die sich durch die gegebene Zahl der Theile dividiren läßt, z. E. 30. Nehmet unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 20, 10, und traget sie aus A in E, D, und ziehet durch E, D mit CB die Parallellinien EF, DG. Denn es ist, wie §. 18 N. II, ABC : AEF : ADG = 30 : 20 : 10 = 3 : 2 : 1, folglich AEF = $\frac{2}{3}$ ABC, ADG = $\frac{1}{3}$ ABC, und also auch CBEF = $\frac{1}{3}$ ABC, FEDG = $\frac{1}{3}$ ABC.

Durch die Rechnung. Es sey AB = 40 F. Demnach ABq = 1600 Qu. F. $\frac{1}{3}$ ABq = ADq = 533 Qu. F. $\frac{2}{3}$ ABq = 1066 Q. F. = AEq. Daher ist $\sqrt{533} = 23$ = AD und $\sqrt{1066} = 32{,}6$ = AE.

§. 24. 12 Aufgabe: Ein Dreyeck aus der Spitze eines gegebenen Winkels in ungleiche Theile nach gegebenen Verhältnissen zu theilen.

Auflösung. Gesetzt, das Dreyeck ABC, Tab. IV Fig. 22, solle aus der Spitze B des Winkels ABC in drey Theile getheilt werden, die sich z. E. wie 4, 5, 6 verhalten. Theilet also mit Hülfe der Lin. arithm. die dem gegebenen Winkel ABC gegenüber liegende Seite AC nach dieser Verhältnis ein, II Abschn. §. 13, und ziehet die Theilungspuncte mit der Spitze B zusammen, vermöge Euclid. VI B. 1 S.

§. 25.

§. 25. Zusätze.

I. Auf ähnliche Weise wird jedes Parallelogramm, z. E. DEFG, Tab. IV Fig. 23, durch Parallellinien mit der einen Seite DG in drey Theile getheilt, die sich z. E. wie 4, 5, 6 verhalten, wenn die andere Seite DE nach dieser Verhältnis getheilt wird.

II. Auch wenn ein Trapezium HIKL, Tab. IV Fig. 24, welches zwey parallele Seiten HI, KL hat, in Theile getheilt werden soll, die sich z. E. wie 4, 5, 6 verhalten sollen: so dürfen nur diese beyden Seiten nach der gegebenen Verhältnis getheilt und die Theilungspuncte zusammengezogen werden. Denn da ist das Dreyeck HLM : MPN : NOI = HM : MN : NI = 4 : 5 : 6; und eben so LMP : PNO : OIK = LP : PO : OK = 4 : 5 : 6. Folglich das Trapezium HP : MO : NK = 4 : 5 : 6.

Durch die Rechnung. Es sey HI = 50 R. LK = 45 R. Zu Folge der Gesellschaftsrechnung ist 4 + 5 + 6 = 15. Demnach $\frac{50}{15}$ R. = 3°3'3'' und $\frac{45}{15}$ R. = 3 R. So ergeben sich

4 × 333'' = 1332' = HM	und	4 × 3° = 12° = LP
5 × 332 = 1665 = MN		5 × 3 = 15 = PO
6 × 333 = 1998 = NI		6 × 3 = 18 = OK
Summe 4995 = HI		45 = LK
Eingerechnet 5		

§. 26. 13 Aufgabe: Ein Dreyeck durch Linien, die einer gegebenen Seite desselben parallel sind, nach gegebenen Verhältnissen einzutheilen.

Auflösung. Es soll auf diese Art z. E. ein dreyeckichtes Feld ABC, Tab. IV Fig. 25, welches für 150 Fl. gekauft worden, unter drey Besitzer eingetheilt werden, von welchen A 60, B 50, C 40 Fl. dazu beygetragen haben, mithin nach der Verhältnis 6 : 5 : 4. Stellet eine von den übrigen Seiten AB auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 15, und nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen 9 für AE, und zwischen 4 für AD. Ziehet mit CB durch E, D die Parallellinien EF, DG. Der Beweis ist dem §. 15 gegebenen ähnlich.

Durch die Rechnung. Es sey AB = 48 R. Folglich ABq = 2304 Qu. R.

Demnach

```
150) 2304 f 15°36'9
     15           40
     80     6 1 4 4 0'9 f 24°8' = AD
     75     4|   |
      5.4  2.| 1 4|
      45     |(4)4|
       90   1| 7 6|
       90    | 3 8|4 0
               (4|8)8
               3 9|0 4
```

und für AE ist $\frac{ABq}{150} \times 90 = 1536'^{q}$

```
             90
    ---------------
    138240'q f 37°1'8" = AE
      9 |     |
    ----|     |
      4 | 8.2 |
        |(6)7 |
      4 | 6 9 |
    ----|-----|
        | 13.|4.0
          (7|4)1
         ---|---|
           5| 99| 00
            |(74|2)8
           5| 94| 24
         ------------
```

§. 27. 14 Aufgabe: Von einem Dreyeck ein Stück, dessen Inhalt gegeben ist, aus einem Winkel abzuschneiden.

Auflösung. Es sey Tab. IV Fig. 26 der Inhalt des Dreyecks HIK 900 Qu. R., seine Höhe 30 R. Man soll von ihm aus H ein Stück von 375 Qu. R. abschneiden. Dividiret den Inhalt des abzuschneidenden Stückes mit der halben Höhe: so ist der Quotient die Grundlinie dieses Stückes; also $\frac{375}{15} = 25$ R. Traget diese Länge von K nach I in M und ziehet HM. Denn es ist der Inhalt des Dreyecks HMK $= \frac{1}{2}$ HL $\times$ MK §. 12 N. IV; folglich giebt der Inhalt mit $\frac{1}{2}$ HL dividirt dessen Grundlinie MK.

§. 28. 15 Aufgabe: Von einem Dreyeck ein Stück, dessen Inhalt gegeben ist, durch eine Parallellinie mit einer gegebenen Seite abzuschneiden.

Auflösung. Man setze Tab. IV Fig. 27 das vorige Dreyeck HIK, dessen Inhalt 900 Qu. R. seine Höhe HL 30 R., so ist die Grundlinie IK $= \frac{900}{15} = 60$ R. Das abzuschneidende Stück durch eine Parallellinie mit IK soll 375 Qu. R. betragen. Stellet eine von beyden übrigen Seiten HK auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 90,0, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 37,5. Schneidet die ihr gleiche HM ab, und ziehet MN mit IK parallel. Denn es ist $90{,}0 : 37{,}5 = 900 : 375$, folglich $\sqrt{90{,}0} : \sqrt{37{,}5} = \sqrt{900} : \sqrt{375} =$ HK : KM. Demnach HKq : KMq = HKI : HMN = 900 : 375.

Durch die Rechnung. Suchet die Höhe HO des Dreyecks HNM. Es ist aber HK : HM = HL : HO, folglich HKq : HMq = HLq : HOq = HKI : HMN. Demnach 900 : 375 = 30.30 : HOq und $\sqrt{375^{\circ q}} = 19°3'6" =$ HO. Ziehet durch O mit IK die Parallellinie NM.

Und

Und um die Grundlinie zu finden, ist HL : IK = HO : NM, demnach $30'' : 60'' = 1936'' : 3872''$. Probe: $\frac{1}{2}$NM × HO = $\frac{3872''}{2} \times 1936'' = 1936'' \times 1936'' = 374''80'96''^{q}$, gehen ab $19'04''^{q}$.

§. 29. 16 Aufgabe: Ein Dreyeck aus einem in einer Seite gegebenen Punct in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey Tab. IV Fig. 28 das Dreyeck ABC aus D in 4 gleiche Theile zu theilen. Ferner sey AC 60 R., BC 48 R., BA 36 R., AD 20 R. Folglich ist das Dreyeck ein Pythagorisches II Abschn. §. und bey B rechtwinklicht. Der Inhalt also ist $\frac{1}{2}AB \times BC = 18 \times 48 = 864$ Qu. R., und $\frac{1}{4}ABC = \frac{864}{4} = 216$ Qu. R. Auch ist $CD = CA - AD = 60 - 20 = 40$ R. Diese CD ist die Grundlinie von $\frac{1}{4}$ ABC, folglich dessen Höhe $\frac{1}{4}ABC : \frac{1}{2}CD = \frac{216}{20} = 10''8'$. Errichtet in C eine senkrechte Linie, traget darauf $CH = 10''8'$, ziehet durch H mit AC die Parallellinie HE, ziehet DE: so ist DEC = $\frac{1}{4}$ABC. Machet FE = EC, oder HI = CH, ziehet DF, oder vorher IF mit AC parallel: so ist wegen FE = EC, auch FDE = EDC = $\frac{1}{4}$ABC. Oder wegen FDC : EDC = IC : HC = 2 : 1 ist FDC = 2 × EDC = $\frac{1}{2}$ABC, folglich FDE = $\frac{1}{4}$ABC. Es sey AD auch eine Grundlinie von $\frac{1}{4}$ABC, so ist dessen Höhe $\frac{1}{4}ABC : \frac{1}{2}AD = \frac{216}{10} = 21''6'$. Dieser ist also $CI = 2CH = 2 \times 10''8'$ gleich. Verlängert daher die Parallellinie IF in G und ziehet GD: so ist auch ADG = $\frac{1}{4}$ABC. Der Rest der Figur ist das Trapezium DGBF = $\frac{1}{4}$ABC. Man kann auf diese Art ein dreyeckichtes Feld eintheilen, an dessen einer Seite ein Brunnen, an welchem mehrere gleichen Antheil nehmen sollen; wenn nur nicht die wenigsten einzutheilenden Felder dreyeckicht wären.

§. 30. 17 Aufgabe: Von einem gegebenen Trapezio ein Stück, dessen Inhalt gegeben ist, abzuschneiden.

Auflösung. Das Trapezium ABCD Tab. IV Fig. 29 sey so groß, daß von AB nach CD durch eine auf AD zu errichtende senkrechte Linie ein Stück von 400 Qu. R. abgeschnitten werden könne. Verlängert CB, DA in E: so entstehet ein Dreyeck ABE, dessen Höhe BF ist. Gesetzt, man fände durch die Messung BF 16 R., EF 31 R., FA 11 R., so ist der Inhalt von EFB = $\frac{1}{2}BF \times EF = 8 \times 31 = 248$ Qu. R., und von AFB = $\frac{1}{2}BF \times FA = 8 \times 11 = 88$ Qu. R. Folglich das Dreyeck EBA = EFB + AFB = 248 + 88 = 336 Qu. R., und vermöge der Bedingung EBA + BAGH = 336 + 400 = 736 Qu. R. Man suchet EG. Da nun EFB : EGH = EFq : EGq = 248 : 736 = $\frac{248}{8} : \frac{736}{8} = 31 : 92$; so stellet EF auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 31, und un-

verrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 92, welcher die gesuchte EG gleich ist. Errichtet aus G das Loth GH: so ist EGH − EBA = 736 − 336 = 400 Qu. R.

Durch die Rechnung wird AG also gefunden.

$$\begin{array}{lllll} & EBF & : EHG & = EFq & : EGq \\ & 248 & : 736 & = 31 \times 31 & : EGq \\ \text{d. i.} & 31 & : 92 & = 961 & : EGq \end{array}$$

Demnach EGq = 2852, und EG = 53°4′

$$\begin{array}{l} EA = 420 \\ \hline AG = 114 \end{array}$$

§. 31. Anmerkung von einigen hieher gezogenen Aufgaben.

Wenn bloß der Inhalt eines Dreyecks z. E. von 60 Qu. R. gegeben ist: so sind unendlich viel Dreyecke zu zeichnen möglich, welche diesen Inhalt haben. Es muß also, vermöge §. 12 N. IV, mit dem Inhalt zugleich entweder die Grundlinie oder die Höhe gegeben seyn. Ist der Inhalt 60 Qu. R., die Grundlinie 12 R., so ist die Höhe $60 : \frac{12}{2} = 10$ R. Wäre die Grundlinie 22 R., so ist die Höhe $60 : \frac{22}{2} = 5°4'5''$. Wäre der Inhalt 300 Qu. R., die Höhe 20 R., so ist die Grundlinie $300 : \frac{20}{2} = 30$ R. Es kommt also darauf noch an, aus welchem Puncte auf der Grundlinie selbst oder dem verlängerten Stücke die Höhe des Dreyecks errichtet, folglich wohin dessen Spitze treffen soll.

* Dieses hat Scheffelt in drey besondern Aufgaben vorgetragen, und mit Figuren erläutert. Jene konnten kurz gefaßt, dieß aber als überflüßig weggelassen werden.

§. 32. 18 Aufgabe: Zu zwey gegebenen ähnlichen Figuren die dritte proportionirte ähnliche Figur zu finden.

Auflösung. Man soll z. E. Tab. IV Fig. 30 zu den ähnlichen Dreyecken A, B das dritte proportionirte ähnliche C finden, so daß sich A : B = B : C verhalte. Stellet eine Seite von A auf der Lin. geom. zwischen eine beliebige Zahl z. E. 10 überzwerch. Stellet unverrückt die ähnlich liegende Seite von B überzwerch, und sehet, zwischen welche Zahl sie treffe, z. E. zwischen 25. Daher ist A : B = 10 : 25 = 2 : 5. Nunmehr stellet eben diese Seite von B überzwerch zwischen 10, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 25: so ist diese die ähnlich liegende Seite des gesuchten Dreyecks C. Vollendet dieses Dreyeck. Denn so ist auch B : C = 10 : 25 = 25, folglich A : B = B : C. Eben so wird umgekehrt für C und B das kleinste Dreyeck gefunden.

Durch die Rechnung. Man setze die ähnlich liegende Seiten von A 447″, von B 707. Demnach 447 : 707 = 707 : 1118″ der ähnlich liegenden Seite von C. Oder $447^2 : 707^2 = 199809 : 499849$ beynahe wie 20 : 50 = 50 : 125, und $\sqrt{125} = 11{,}18$, folglich die gesuchte Seite 1118″.

§. 33. 19 Aufgabe: Zu drey gegebenen ähnlichen Figuren die vierte proportionirte ähnliche Figur zu finden.

Auflösung. Man soll z. E. Tab. IV Fig. 31 zu drey Vierecken A, B, C, die sich wie 6, 9, 8 verhalten, das vierte proportionirte finden. Stellet die Seite von C auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 60, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 90: so ist diese der Seite des gesuchten Vierecks D, und es ist A : B = C : D, 6 : 9 = 8 : 12. Suchet man aber zu B, C, A, die sich wie 9, 8, 6 oder wie 90, 80, 60 verhalten, das vierte: so stellet die Seite von A überzwerch zwischen 90, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 80: so ist diese der Seite von E gleich, und es ist B : C = A : E, 9 : 8 = 6 : $5\frac{1}{3}$.

Durch die Rechnung. Es sey die Seite von A 14", B 17"2', C 16"3'. Da nun die Seiten der Vierecke auch proportional sind: so ist

140 : 172 = 163 : 200 der Seite von D
172 : 163 = 140 : 132 der Seite von E.
Oder $140^2 : 172^2 = 163^2$: 40102, die Wurzel 200
$172^2 : 163^2 = 140^2$: 17603, die Wurzel 132.

§. 34. 20 Aufgabe: Zu zwey ähnlichen Figuren und einer dritten unähnlichen Figur die vierte proportionirte Figur zu finden, welche der dritten ähnlich sey.

Auflösung. Man setze Tab. IV Fig. 32 zwey Vierecke ABq : ACq = 6 : 9 und ein Dreyeck DEF; man soll ein ähnliches Dreyeck finden, zu dem sich DEF verhalte, wie ABq : ACq. Stellet die eine Seite DE des Dreyecks DEF auf der Lin. geom. zwischen 60 überzwerch, und nehmet unverrückt die Weite zwischen 90 überzwerch: so ist die ihr gleiche DG die ähnlich liegende Seite des gesuchten Dreyecks DGH, welches leicht vollendet werden kann. Hiemit ist §. 18 N. II zu vergleichen; die Rechnung aber ist mit der §. 33 gewiesenen einerley.

§. 35. Noch eine andere hieher gezogene Aufgabe.

Scheffelt hat sie. Es bauet einer eine Brücke, die 3mal länger, als breit ist, und zahlet für jede Quadratklafter so viel Fl., als die Breite Quadratklaftern giebt, für den ganzen Bau aber 768 Fl., wie lang und breit ist die Brücke? Die leichte arithmetische Auflösung ist folgende. Es habe die Breite x Klaftern, folglich hat die Länge 3 x Klaftern, und die Brücke $3x^2$ Qu. Kl. Für 1 Qu. Kl. zahlet er x^2 Fl., für $3x^2$ Kl. aber 768 Fl. Folglich ist $1 : x^2 = 3x^2 : 768$, demnach die Gleichung $3x^4 = 768$, $x^4 = 256$, $x = 4$. Die Brücke ist 4 Kl. breit, und $3 \times 4 = 12$ Kl. lang. Vermittelst des Proportionalzirkels aber verfährt man also: weil die gevierte Breite $\frac{786}{3} = 256$ Fl. kostet: so nehmet auf der Lin. arithm. gerade $\frac{256}{2} = 128$, stellet diese Weite auf der Lin. geom. 64, und unver-

rückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 1, diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt, giebt 16. Denn $\sqrt{64} : \frac{256}{2} = \sqrt{1} : 16$, d. i. $8 : 128 = 1 : 16$. Stellet diese auf der Lin. arithm gerade genommene Länge von 16 Theilen auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 16, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 1, welche auf der Lin. arithm. gerade gestellt, 4 giebt. Denn $\sqrt{16} : 16 = \sqrt{1} : 4$, d. i. $4 : 16 = 1 : 4$. Man sehe Tab. IV Fig. 33.

§. 36. 21 Aufgabe: Die Seiten beyder Vierecke zu finden, die in und um einen gegebenen Kreis beschrieben werden können.

Auflösung. Weil für das innere Viereck Tab. IV Fig. 34 $ABq = ACq + CBq = 2ACq$: so suchet zu einem Viereck, dessen Seite der gegebene Halbmesser ist, die Seite des doppelten Vierecks §. 18 N. I. Und weil $EF = 2CD$: so ist die Seite des äußern Vierecks dem doppelten Halbmesser gleich. Folglich ist $ABq : EFq = 2CDq : 4CDq = 1 : 2$, und eben so die Kreise, welche mit CA, CE beschrieben werden, weil $CAq : CEq = \frac{1}{2}ABq : \frac{1}{2}EFq = ABq : EFq = 1 : 2$.

Ist $CA = 10°$: so ist $CAq = 100°^q$, $ABq = 200°^q$, folglich $AB = 14°1'4''$, und $2ABq = EFq = 400°^q$, mithin $EF = 20°$.

§. 37. 22 Aufgabe: Einen halben Kreis, auch einen Quadranten in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Der ganze Kreis verhält sich zum Viereck des Durchmessers, wie der halbe Kreis zum halben Viereck des Durchmessers, und wie der Quadrant zum vierten Theil des Vierecks des Durchmessers. Nun ist Tab. IV Fig. 35, $\frac{1}{2}ABq = \frac{1}{2} \times 4CBq = 2CBq = DBq$; und $\frac{1}{4}ABq = \frac{1}{4} \times 4CBq = CBq = CDq$. Folglich sind die Kreise, deren Durchmesser DB, DC sind, die gesuchten. Stellet also den Durchmesser AB überzwerch auf der Lin. geom. zwischen eine Zahl, die sich mit 2, 4 dividiren läßt, z. E. zwischen 20, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 10, 5: so sind ihnen die gesuchten Durchmesser BD, DC gleich.

Ist $AB = 10°$, so ist $ABq = 100°^q$, $\frac{1}{2}ABq = 50°^q$, $\frac{1}{4}ABq = 25°^q$. Demnach $\sqrt{50} = 7°0'7'' = DB$, $\sqrt{25} = 5° = DC$.

§. 38. 23 Aufgabe: Ein Dreyeck in ein Rechteck und Viereck zu verwandeln.

Auflösung. Das Dreyeck sey EFG Tab. IV Fig. 36, seine Höhe FH. Halbiret FH in I: so sind IH, EG die Seiten des gesuchten Rechtecks. Suchet zwischen diesen beyden Seiten die mittlere Proportionallinie GK §. 6: so ist $GKq = EL = EFG$.

Es sey $EG = 40'$, $FH = 36'$: so ist der Inhalt des Dreyecks $20 \times 36 = 720'^q$. Folglich des Rechtecks $EG \times \frac{1}{2}FH = 40 \times 18$ auch $720'^q$. Und wegen $18 : x = x : 40$ ist auch $x^2 = 720$, und $x = \sqrt{720} = 27'$ ohne einen hier merklichen Fehler.



IV. Von

IV. Von der Linea Tetragonica.

TABULA TETRAGONICA.

Seitenzahl.	Länge der Seite.	Theile des Maaßst.
3	10000	2000
4	6580	1316
5	5017	1003
6	4082	816
Halbm. des Kr.	3713	743
7	3452	690
8	2995	599
9	2647	529
10	2372	474
11	2150	430
12	1967	393
13	1812	362
14	1680	336
15	1567	313
16	1467	293
17	1380	276
18	1303	261
19	1233	247
20	1171	234

§. 1. Erklärung und Absicht der Lineae Tetragonicae.

Die Linea Tetragonica giebt von ordentlichen Vielecken, welche gleichen Inhalts sind, vom gleichseitigen Dreyecke bis zum Zwanzigecke die Verhältnis der Seiten an. Wenn also die Seite eines ordentlichen Vielecks von so viel Seiten gegeben ist: so kann man dadurch die Seite eines andern finden, das ihm gleich ist, oder ein gegebenes in ein anderes verwandeln. Man nimmt zugleich den Kreis selbst mit, um ihn in ein ordentliches Vieleck, und umgekehrt ein ordentliches Vieleck in einen Kreis zu verwandeln.

§. 2. Gründe der Berechnung dieser Tafel.

I. Die erste ordentliche Figur ist das gleichseitige Dreyeck, dessen Inhalt hier dem Inhalt aller übrigen ordentlichen Vielecke und des Kreises gleich gesetzt wird. Man gebe Tab. V Fig. 1 seiner Seite AB 10000 Theile, und fälle CD senkrecht auf AB: so wird der Winkel desselben BCA und AB in D halbirt. Daher, wenn man die Seite CB oder CA für

für den Sinus totus annimmt, ist $CD = \sin 60° = 8660$, $AD = DB = \sin 30° = 5000$, folglich der Inhalt des gleichseitigen Dreyecks $CD \times \frac{1}{2} AB = 8660 \times 5000 = 43300000$.

II. Hierauf folget das ihm gleiche Viereck. Da sein Inhalt 43300000 ist: so ist seine Seite, die aus dieser Zahl gezogene Quadratwurzel, gleich 6850 solchen Theilen, deren die Seite des ihm gleichen gleichseitigen Dreyecks 10000 hat.

III. Den Halbmesser des ihm gleichen Kreises findet man vermöge III Absch. §. 19 N. III aus der beständigen Verhältnis des Kreises zum Viereck seines Durchmessers, wie beynahe 785 : 1000, nach der Regel Detri:

$$785 : 1000 = 43300000 : \text{Quadr. Diam.}$$

Demnach mit den Logarithmen

$$\begin{aligned} \log 1000 + \log 43300000 &= 10,6.36.48.79 \\ \log 785 &= \underline{2,8\,94\,86\,97} \\ \log \text{Quadr. Diam.} &= \underline{7,7\,41\,61\,82} \\ 2) & \\ \log. \text{Radic.} &= 3,8\,70\,80\,91 \end{aligned}$$

Es hat also der Durchmesser 7427 und der Halbmesser 3713 Theile.

IV. Die Seite eines ihm gleichen ordentlichen Fünfecks, oder überhaupt eines jeden ihm gleichen ordentlichen Vielecks läßt sich folgendermaßen finden. Es sey Tab. V Fig. 2, EFG ein gleichschenklichtes Dreyeck, und zugleich der nte Theil eines ordentlichen Vielecks von n Seiten, so daß EG eine seiner Seiten, und $EF = GF$ der Halbmesser des Kreises sey, welcher um das Vieleck beschrieben werden kann. Demnach ist der Winkel $FEG = FGE$ der halbe Vieleckswinkel. Er heiße φ, das Loth $FH = p$, die halbe Seite des Vielecks $EH = HG = x$. Mithin ist, die Seite FE für den Halbmesser genommen, $\cos FEH : EH = \sin FEH : FH$, d. i. $\cos\varphi : x = \sin\varphi : p$, folglich $p = x \times \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ $= x \tan\varphi$ (verglichen mit der Anmerkung im folgenden §.) und also des Dreyecks EFG Inhalt $FH \times HE = px = x^2 \tan\varphi$. Wenn nun der Inhalt eines gleichseitigen Dreyecks, mithin eines ihm gleichen ordentlichen Vielecks, $= a^2$ gesetzt wird: so ist der Inhalt des nten Theils $\frac{a^2}{n} = x^2 \tan\varphi$, und also $x = \sqrt{\frac{a^2}{n \tan\varphi}}$, auch die ganze Seite des Vielecks $2x =$ $2\sqrt{\frac{a^2}{n \tan\varphi}} = \sqrt{\frac{4a^2}{n \tan\varphi}}$, welche Formel für die Rechnung bequemer ist, als wenn man sie auf $\frac{2a}{\sqrt{n \tan\varphi}}$ gründete, weil man vorher a durch die Ausziehung der Wurzel suchen müßte.

V. Hieraus läßt sich die Tafel für die Lin. Tetrag. sehr leicht berechnen. Denn z. E. für die Seite des Fünfecks ist $n = 5$, $\varphi = 54°$. Demnach

$a^2 =$

$$a^2 = 43300000$$
$$4a^2 = 173300000$$
$$\log 4a^2 = 8{,}2385479$$
$$\log \tan 54^\circ = 10{,}1387390$$
$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$\log n \tan \varphi = 10{,}8377090$$
$$7{,}4008389$$
$$2)\overline{\qquad}$$

$\log 5017 = 3{,}7004194$ für die Seite des Fünfecks.

Ist einmal $\log 4a^2$ gefunden: so ergiebt sich ferner für das Sechseck, wo $n = 6$, $\varphi = 60^\circ$,

$$\log 4a^2 = 8{,}2385479$$
$$\log \tan 60^\circ = 10{,}2385606$$
$$\log 6 = 0{,}7781513$$
$$11{,}0167119$$
$$7{,}2218360$$
$$2)\overline{\qquad}$$

$\log 4082 = 3{,}6109180$ für die Seite des Sechsecks u. s. w.

§. 3. 1 Anmerkung.

Weil überhaupt für jeden Winkel oder Bogen $\cos : \sin = \sin.\ \text{tot.} : \tan.$ und also $\frac{\sin}{\cos} = \frac{\tan}{\sin\ \text{tot}}$: so sollte auch in der Gleichung $p = x \tan \varphi$ stehn $p = x \frac{\tan \varphi}{\sin\ \text{tot}}$, indem jenes nur gilt, wenn der sin tot = 1 angenommen wird. Weil aber in den gewöhnlichen logarithmischen Tafeln der sin tot = 10000000000 angenommen worden, welcher Zahl Logarithme 10 ist: so berechnet man eigentlich alles so, als wenn die Formel wäre: $2x = \sqrt{\frac{4a^2 \times \sin\ \text{tot}}{n \times \tan \varphi}}$, und die Rechnung würde so stehen, z. E.

$$\log \sin\ \text{tot} + \log 4a^2 = 18{,}2385479$$
$$\log 6 + \log \tan 60^\circ = 11{,}0167119$$
$$7{,}2218360 \text{ u. s. w.}$$

daher zum $\log 4a^2$ durchgehends in Gedanken der log sin tot addirt wird.

§. 4. 2 Anmerkung.

Goldmann hat pag. 30 Recht, wenn er schreibt, daß diese Linie mit vieler Mühe ausgerechnet werde. Das §. 2 gelehrte Verfahren erleichtert alles. Scheffelts Anweisung bestätigt dieses, welche hier mitzunehmen ist. Er nimmt also z. E. die Seite des Fünfecks auch von 10000 Theilen an, und sucht daraus dessen Inhalt. Es ist aber, wenn

Tab. V Fig. 2 das Dreneck E F G $\frac{1}{5}$ des Fünfecks vorstellt, E G = 10000, der Winkel F E H = 54°, folglich E F H = 36°, jener der halbe Polygon- dieser der halbe Centriwinkel. Demnach

$$\sin EFH : EH = \sin FEH : FH$$
$$\sin 36° : 5000 = \sin 54° : FH$$

log 5000 = 3,6989700
log sin 54° = 9,9079576
13,6069276
log sin 36° = 9,7692187
log FH = 3,8377089

Folglich das Loth 6882, welches mit $\frac{1}{2}$ E G = E H = 5000 multiplicirt, den Inhalt von $\frac{1}{5}$ des Fünfecks 34410000, mithin des ganzen 172050000 giebt. Es soll aber sein Inhalt dem Inhalte des gleichseitigen Dreyecks 43300000 gleich seyn. Da nun ähnliche Figuren sich wie die Vierecke ihrer ähnlich liegenden Seiten Verhalten, so schließt man: wie der Inhalt eines Fünfecks, dessen Seite 10000 ist, zum Viereck dieser Seite, so der gegebene Inhalt des dem Dreyeck gleichen Fünfecks, zu der diesem Inhalt zukommenden Seite. Mithin

172050000 : 100000000 = 43300000 : Qu. der Seite

Die weitläuftige Rechnung giebt 25167102, und dieser Zahl Quadratwurzel 5016. Mit den Logarithmen findet man sie hier weit leichter. Es ist

17205 : 10000 = 43300000 : Qu. der Seite

log 1000 + log 433 00000 = 11,6364879
log 17205 = 4,2356547
log des Qu. der Seite = 7,4008332
2)
log der Seite = 3,7004166

Die Seite ist 5016, wie vorher.

§. 5. Eintheilung der Lineae Tetragonicae.

Duplirет die gefundenen Seitenzahlen der Tafel: so kommen auf die Seite des gleichseitigen Dreyecks 20000, des Vierecks 13160, des Fünfecks 10034 u. s. w. und wenn man alle diese Zahlen mit 100 dividirt, auf diese genannte Seiten 200, 132, 100 ꝛc. Theile, oder lieber 200,0; 131,6; 1003 ꝛc. Im ersten Falle trägt man von der Lin. arithm. die Theile auf; im andern noch genauer von einem verjüngten Maaßstabe, auf welchem sich die Zehntheile jeden Theiles der Lin. arithm. angeben lassen, dergleichen Tab. I Fig. 2 ist.

§. 6. Anmerkung.

Scheffelt verfähret in seinen Umschweifen, seine Rechnung §. 4 vorausgesetzt, also. Es war die Verhältnis des Inhalts eines gleichseitigen Dreyecks zum ordentlichen Fünfeck, deren Seiten 10000 Theile haben, 172050000 : 43300000 = 17205 : 4330 beynahe, wenn man

man mit 20 dividirt, wie 860 : 216 = 86 : 21, 6. Dieses sey die Verhältnis zweyer ordentlichen Fünfecke, von deren ersten die Seite 10 Theile habe. Folglich hat deren Viereck 100 Theile. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 100 Theile, stellet diese Weite auf der Lin. geomet. überzwerch zwischen 86, und unverrückt nehmet die Weite zwischen 21,6 : so giebt diese auf der Linea arithm. gerade 50,2 Theile, oder die Seite des Fünfecks.

§. 7. 1 Aufgabe: Eine gegebene ordentliche Figur in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Es sey Tab. V Fig. 3 das Viereck I K q in einen Kreis zu verwandeln. Stellet dessen Seite I K überzwerch auf der Lin. Tetrag. zwischen 4, und unverrückt nehmet die Weite zwischen den Puncten, bey welchen das Zeichen O stehet: so ist diese Weite dem gesuchten Halbmesser des Kreises LM gleich, der mit dem Viereck gleichen Inhalt hat.

Durch die Rechnung aus der Tafel. Es sey die Seite des Vierecks 26. Demnach 6580 : 3712 = 20 : Halbm.

log 3712 = 3,5696080
log 20 = 1,3010300
4,8706380
log 6580 = 3,8182259
log. des Halbm. = 1,0524121
Der Halbmesser ist 11,28.

Oder nach III Abschn. §. 19 N. III, 785 : 1000 = 400 : 509, 5541 dem Quadrat des Durchmessers. Die Wurzel 22, 57 ist der Durchmesser, folglich der Halbmesser 11,28.

§. 8. 2 Aufgabe: Umgekehrt, einen gegebenen Kreis in eine ordentliche Figur zu verwandeln.

Auflösung. Es sey Tab. V Fig. 3 der Kreis, dessen Halbmesser LM ist, in ein Viereck oder in ein Fünfeck zu verwandeln. Stellet den Halbmesser überzwerch auf der Lin. Tetrag. zwischen das Zeichen O, und unverrückt nehmet die Weiten zwischen 4, 5: so ist die eine der Seite des Vierecks I K, und die andere Fig. 4 der Seite des Fünfecks N O gleich.

Durch die Rechnung aus der Tafel. Es sey der Halbmesser 11, 28. Demnach
3712 : 6580 = 11,28 : Seite des Vierecks

log 11,28 = 1,0523091
log 6580 = 3,8182259
4,8705350
log 3712 = 3,5696080
1,3009270
Die Seite des Vierecks ist 19,997 oder 20.

 Oder,

Oder, wie §. 7, $1000 : 785 = (22,57)^2 :$ Viereck

$$
\begin{aligned}
\log 22,57 &= 1,3535316 \\
\log (22,57)^2 &= 2,7070632 \\
\log 785 &= 2,8948697 \\
&\overline{5,6019329} \\
\log 1000 &= 3,0000000 \\
&\overline{2,6019329} \\
2) &\overline{1,3009664}
\end{aligned}
$$

Die Seite des Vierecks ist 19,998 oder 20.

Für die Seite des Fünfecks suchet zu 3712, 5017 und 11, 28 die vierte Proportionalzahl, welche 13, 13 ist.

§. 9. 3 Aufgabe: Eine gegebene ordentliche Figur in eine andere zu verwandeln.

Auflösung. Es sey Tab. V Fig. 5 das Viereck PQq gegeben. Man sucht die Seiten des ihm gleichen Fünf- und Sechsecks. Stellet die Seite des Vierecks PQ auf der Lin. Tetrag. überzwerch zwischen 4 und unverrückt nehmet die Weiten zwischen 5, 6: so sind die ihnen gleiche RS, TV die Seiten des gesuchten Fünf- und Sechsecks.

Durch die Rechnung aus der Tafel. Es sey die Seite des Vierecks PQ = 20: so ist für das Fünfeck $6580 : 5.0.17 = 20 :$ Seite

$$
\begin{array}{l}
\underline{329}\ )\ \underline{329} \qquad 1 \\
\quad 17.27\ f\ 15,25 \\
\quad \underline{1645} \\
\qquad 8.2.0 \\
\qquad \underline{658} \\
\qquad 1620 \\
\qquad 1645
\end{array}
$$

Für das Sechseck $6580 : 4.0.82 = 20 :$ Seite

$$
\begin{array}{l}
\underline{329}\ )\ \underline{329} \qquad 1 \\
\quad 79.2\ f\ 12,40 \\
\quad \underline{658} \\
\quad \underline{134.0} \\
\quad \underline{1316} \\
\qquad 240
\end{array}
$$

§. 10. 4 Aufgabe: Eine ordentliche Figur oder einen Kreis zu zeichnen, der mehreren gegebenen ordentlichen Figuren zusammen genommen, gleich sey.

Auflösung. Es mögen Tab. V Fig. 6 das gleichseitige Dreyeck A, Viereck B, Fünfeck C, Sechseck D gegeben seyn, deren jedes Seite 40 F. habe: man soll ein Viereck zeichnen, das diesen 4 Figuren zusammengenommen gleich sey. Verwandelt mit Hülfe der Lin. Tetrag. die Figuren A, C, D in Vierecke §. 9, deren Seiten a, c, d sind. Die Seite des Vierecks selbst b ist schon gegeben. Addiret diese 4 Vierecke, oder suchet die Seite eines Vierecks, welches so groß als $a^2+b^2+c^2+d^2$ sey, vermittelst der Lin. Geom. III Abschn. §. 14. Oder: Traget auf beyde Seiten eines rechten Winkels ab $EF=a$, $EG=b$, ziehet GF: so ist $GFq=EFq+EGq=a^2+b^2$. Machet $EH=GF$, $EI=c$ und ziehet IH: so ist $IHq=EHq+EIq=GFq+c^2=a^2+b^2+c^2$. Endlich machet $EK=IH$, $EL=d$, und ziehet LK: so ist $LKq=EKq+ELq=IHq+d^2=a^2+b^2+c^2+d^2$. Machet $EM=LK$ und vollendet das Viereck: so ist $EMq=LKq=a^2+b^2+c^2+d^2=A+B+C+D$. Dieses Viereck läßt sich nach §. 9 in jede andere ordentliche Figur, oder nach §. 7 in einen Kreis verwandeln.

Durch die Rechnung nach der Tafel.

Für A	10000 : 6580 = 40 :	26,32	welches a ist.
B		40,00	b
C	5017 : 6580 = 40 :	52,46	c
D	4082 : 6580 = 40 :	64,48	d

Demnach
$a^2 = 692,7424$
$b^2 = 1600,0000$
$c^2 = 2752,0516$
$d^2 = 4157,6704$
$\sqrt{9202,4644} = 95,92$

§. 11. 5 Aufgabe: Eine jede unordentliche Figur in eine ordentliche oder in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Die Figur ABCDE Tab. V Fig. 7 sey gegeben. Theilet sie durch die Diagonalen AD, DB in 3 Dreyecke, ziehet auf diese die Höhen CF, BG, EH. Verwandelt jedes Dreyeck in ein Viereck, indem ihr zwischen seiner halben Höhe und Grundlinie die mittlere Proportionallinie suchet, III Abschn. §. 38. Die Seiten dieser Vierecke mögen seyn a, b, c. Suchet nach des III Abschn. §. 14 oder §. 10 die Seite d eines Vierecks IKLM, welches der Summe dieser drey Vierecke gleich sey, also $d^2=a^2+b^2+c^2=ABCDE$. Verwandelt nach §. 9 dieses Viereck in eine andere ordentliche Figur, oder nach §. 7 in einen Kreis. Wie hier die Rechnung anzustellen sey, ist an sich begreiflich. Man suchet den Inhalt der ganzen Figur und ziehet daraus die Quadratwurzel.

V. Von der Linea Subtensarum Angulorum Polygonorum.

§. 1. Erklärung und Endzweck.

Wenn Tab. V Fig. 1 mit der Seite AB einer ordentlichen Figur, als dem Halbmesser, ein Bogen zwischen beyden Schenkeln eines ihrer Winkel beschrieben wird: so ist er das Maaß dieses Winkels und seine Sehne AC ist gegeben. Daher verhält sich der Halbmesser zur Sehne des Winkels der Figur, wie ihre Seite zu einer Diagonallinie, welche von der Figur ein Dreyeck abschneidet. Wird also die Sehne des Winkels einer ordentlichen Figur von so viel Seiten, als über welche Zahl man schwerlich gehet, z. E. des Dreyßigecks * zur Einheit angenommen: so kann man in Theilen dieser Sehne die Sehnen der Winkel für die übrigen ordentlichen Figuren von weniger Seiten finden; mithin umgekehrt, zu einer gegebenen Seite die Sehne des Winkels, welche ein Dreyeck von der Figur abschneidet, oder diesen Winkel subtendiret.

* Mit Goldmann. Barnikel geht nur bis auf das Zwölfeck.

§. 2. Gründe der Berechnung der hieher gehörigen Tafel.

I. Es sey Tab. V Fig. 1, AB die Seite des Dreyßigecks, ABE dessen Winkel: so ist der Bogen $AFGCE = 180^\circ - \frac{360^\circ}{30} = 180 - 12 = 168^\circ$, die Sehne aber $AE = 2 \sin 64^\circ$, dem doppelten Sinus des halben Winkels der Figur. Es ist aber $\sin 64^\circ$ für den Halbmesser der Tafeln gegeben, welcher r sey. Nimmt man also die Sehne für die in 10000 Theile getheilte Einheit an: so ergiebt sich in solchen Theilen der zugehörige Halbmesser ϱ aus

$$2 \sin 84^\circ : r = 10000 : \varrho$$

$$\begin{aligned} \log r + \log 10000 &= 14{,}0000000 \\ \log \sin 84^\circ &= 9{,}9976143 \\ \log 2 &= 0{,}3010300 \\ & \overline{10{,}2986443} \\ \log \varrho &= 3{,}7013557 \end{aligned}$$

Demnach ist $\varrho = 5028$, und zugleich die Sehne AF für das gleichseitige Dreyeck.

II. Für jede andere ordentliche Figur, deren halber Winkel $= \varphi$ sey, und die gesuchte Sehne $= x$, ist

$$r : 2 \sin \varphi = \varrho : x$$

und also $x = \frac{2\varrho}{r} \times \sin \varphi$, folglich $\log x = \log \frac{2\varrho}{r} + \log \sin \varphi$.

Mithin ist der $\log \frac{2\varrho}{r}$ beständig, und man darf nur zu ihm jeden $\log \sin \varphi$ oder den Logarith-

garithmen des halben Winkels der gegebenen Figur addiren, um den Log. der gesuchten Sehne zu erhalten.

III. Es ist also $\log \varrho = 3,7013557$
$\log 2 = 0,3010300$
$4,0023857$
$\log r = 10,0000000$

Der beständige $\log \frac{2\varrho}{r} = -6,0023857$

IV. So ergiebet sich sehr leicht nachstehende Tafel. Es ist z. E. für das Viereck $\varphi = 45°$, mithin

$\log \sin 45° = 9,8494850$
$\log const. -6,0023857$
$3,8518707$

Die Sehne AG = 7110.

Tabula Subtensarum Angulorum Polygon. Regul.

Seitenzahl.	Sehne.	Theile des Maaßstabes.	Seitenzahl.	Sehne.	Theile des Maaßstabes.
3	5028	1005	13	9763	1953
4	7110	1422	14	9803	1961
5	8135	1627	15	9836	1967
6	8708	1741	16	9862	1972
7	9058	1811	17	9884	1977
8	9290	1858	18	9902	1980
9	9449	1889	19	9918	1983
10	9563	1913	20	9931	1986
11	9648	1929	25	9976	1995
12	9712	1942	30	10000	2000

§. 3. 1 Aufgabe: An eine gegebene gerade Linie eine andere unter dem Winkel einer gegebenen ordentlichen Figur zu stellen.

Auflösung. Es soll Tab. V Fig. 2 an die Linie AB in A der Winkel des Fünfecks gestellt werden. Beschreibet aus A mit AB einen Bogen. Stellet AB auf der Linea Subtens. überzwerch zwischen 3 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 5. Durchschneidet mit dieser Weite den Bogen aus B in C, und ziehet AC: so ist CAB der Winkel des Fünfecks.

Durch

Durch die Rechnung nach der Tafel. Es sey AB 20, so ist: Seite des Dreyecks : Seite des Fünfecks = 5028 : 8135 = 20 : 32, 36.

Oder: Weil CAB der Winkel eines Vielecks ist: so ist wegen AC = AB, der Winkel ACB = ABC halbe Winkel am Mittelpunkte, demnach 36° im Fünfeck. Man hat also sin. ACB : AB = sin CAB : CB, hier sin 36° : 20 = sin 108° : CB.

§. 4. 2 Aufgabe: In einem gegebenen Kreise den Winkel am Mittelpuncte für ein gegebenes ordentliches Vieleck zu finden.

Auflösung. Ziehet Tab. V Fig. 3 einen Durchmesser DF. Stellet den Halbmesser DE überzwerch auf der Lin. Subtens. zwischen 3 und unverrückt nehmet überzwerch z. E. für das Fünfeck die Weite zwischen 5. Schneidet mit dieser Weite aus F den Bogen FG ab, und ziehet EG: so ist DEG der Winkel des Fünfecks am Mittelpuncte und DG seine Seite. Denn es heiße der Winkel am Mittelpuncte für eine ordentliche Figur x, der Winkel der Figur GEF selbst α: so ist $180° - \alpha = x$. Allein $180° - GEF = 180° - \alpha = DEG$; folglich $DEG = x$.

Durch die Rechnung wird für einen gegebenen Halbmesser DE die Sehne FG wie §. 3 gefunden.

* Man machet aus dieser Aufgabe ohne Noth zwey besondere: 1) zu einem gegebenen Halbmesser die Seite eines ordentlichen Vielecks und dessen Winkel zu finden, und 2) an einem Puncte, der in einer geraden Linie gegeben ist, den Winkel am Mittelpuncte für ein gegebenes ordentliches Vieleck zu finden.

§. 5. 3 Aufgabe: Zu finden, ob ein gegebener Winkel zu einer ordentlichen Figur gehöre, oder nicht.

Auflösung. Ist der gegebene Winkel spitzig: so ist nur der einzige von 60° der Winkel einer ordentlichen Figur, nämlich des gleichseitigen Dreyecks. Der rechte Winkel ist des Vierecks. Also kommen hier vornehmlich stumpfe Winkel in Betrachtung. Beschreibet Tab. V Fig. 4. 5 zwischen beyden Schenkeln des gegebenen Winkels einen Bogen KI. Stellet den Halbmesser auf der Lin. Subtens. zwischen 3, nehmet die Sehne KI und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie sich überzwerch stellen lasse. Träfe Fig. 4 KI zwischen 5: so ist KHI der Winkel des Fünfecks. Träfe aber Fig. 5 KI zwischen 6 und 7: so ist KHI kein Winkel eines ordentlichen Vielecks, sondern größer als der Winkel des Sechs- und kleiner als des Siebenecks.

Durch die Rechnung. Es sey Fig. 4. HI = 20, KI = 32, 36: so ist nach der Tafel 20 : 32, 36 = 5028 : 8135, demnach KHI der Winkel des Fünfecks. Es sey Fig. 5. HI = 20, KI = 36, demnach 20 : 36 = 5028 : 9050 und also der Winkel KHI größer als der Winkel des Sechs- und kleiner als des Siebenecks.

Oder

Oder: Fället aus H das Loth HL auf KI: so wird KI halbirt und es ist HI: sin tot = LI: sin $\frac{1}{2}$ KHI. Mithin Fig. 4, 20: rad = 16, 18: sin $\frac{1}{2}$ KHI. Die Rechnung giebt 54°. Folglich 2 × 54° = 108° der Winkel des Fünfecks.

§. 6. 4 Aufgabe: Ueber eine gegebene gerade Linie ein ordentliches Vieleck zu beschreiben.

Auflösung. Es soll z. E. Tab. V Fig. 6 über LM ein Fünfeck beschrieben werden. Stellet an LM in L eine ihr gleiche Linie LN unter dem Winkel des Fünfecks NLM, und eben so MO in M, §. 3. und an N den Winkel LNP. Ziehet PO. Setzet nämlich überhaupt dieses Verfahren fort, beym 5, 6, 7 Eck rc. 3, 4, 5 mal rc.

* Man muß im Zeichnen sehr geübt seyn, wenn die Figur bey diesem Verfahren schließen soll, d. h. wenn für das Fünfeck nach der Ordnung die Winkel OLM, MLN, LNP gezeichnet worden, daß die letzte zu ziehende Linie PO der Seite gleich ist. Je mehr Seiten das Vieleck hat, desto leichter kann sich ein Fehler einschleichen.

Anders. Fig. 7. Suchet den Winkel NLM, wie vorher. Halbiret NM in Q und ziehet LQ. Halbiret eine Seite LM in R und errichtet RS senkrecht. Verlängert LQ, bis sie RS in T schneide: so ist T der Mittelpunct des Kreises, in welchem sich die Seite herumtragen läßt.

Durch die Rechnung ergiebt sich der Halbmesser TL aus dem halben Winkel der Figur TLR und der halben Seite LR, nach der Proportion cos TLR : LR = sin tot : LT.



VI. Von der Linea Reductionis Planorum et Corporum Regularium.

I. TABULA PRO TRANSMUTANDIS CORPORIBUS REGULARIBUS.

Latus Corpor. 10000	Radius Figurae.	Perpend. Figurae.	Semicir-cumf. Fig.	Area Figurae.
Tetraëdri	5773	2887	15000	43305000
Octaëdri	5773	2887	15000	43305000
Hexaëdri	7071	5000	20000	100000000
Icosaëdri	5773	2887	15000	43305000
Dodecaëdri	8506	6882	25000	172050000

Corporis.	Radius.	Perpend.	Soliditas unius Pyramidis.	Soliditas totius Corporis.
Tetraëdri	6124	2041	29461835000	117847340000
Octaëdri	7071	4082	58923670000	471389360000
Hexaëdri	8660	5000	166666666667	1000000000000
Icosaëdri	9510	7557	109085295000	2181705900000
Dodecaëdri	14012	11135	638592250000	7663107000000

SPHAERAE.

Diameter	10000	Area Circ. max.	78540000
Semidiameter	5000	Superf. Sphaerae	314160000
Circumferentia	31416	Soliditas	523600000000

II. TABULA PRO REDUCENDIS PLANIS REGULARIBUS.

Latus Trianguli aequilateri 10000, Quadrati 6580, *Diam.* Circuli 7426

PARTES

PARTES LINEAE.		
Latera	EX CALCULO	PARTES
Tetraëdri } *Trianguli* }	10000	2000
Diameter Circuli	7426	1485
Latera		
Quadrati	6580	1312
Octaëdri	6300	1260
Diameter		
Sphaerae	6083	1216
Latera		
Hexaëdri	4903	980
Icosaëdri	3780	756
Dodecaëdri	2487	497

§. 1. Einleitung.

Die Lehre von den Eigenschaften der fünf ordentlichen geometrischen Körper, welche entweder **Pythagoras** selbst, oder doch die Pythagoräer erfunden haben (**Montucla** Hist. des Math. T. I p. 114, **Heilbronner** Hist. Math. p. 108), nämlich des Tetraëdri, Hexaëdri oder Cubi, Octaëdri, Dodecaëdri und Icosaëdri, nach **Goldmann**, des **Vier- Sechs- Acht- Zwölf-** und **Zwanzigsitzes**, hat allerdings in die übrige Mathematik und deren Ausübung einen sehr geringen Einfluß. Denn höchstens geben sie Beyspiele zu Uebungen in perspectivischen Zeichnungen ab, womit Hrn. Hofr. **Kästners** Anfangsgründe der Perspect. §. 36 u. f. zu vergleichen, oder daß auf ein in einem Garten errichtetes Dodecaëdrum 11 verschiedene Sonnenuhren gezeichnet werden. Indessen durfte in **Rami** Scholis mathem. L. 30 p. 306 beym inutilius des ineptius nicht stehen, noch **Montucla** a. a. O. sich eben so über diese Materie aufhalten: vielmehr fand **Kepler** bey den Verhältnissen ihrer Abmessungen manches, was sich mit der Einrichtung des Weltgebäudes vergleichen ließe, wohin sein Prodromus Diss. cosmogr. continens Mysterium cosmograph. Tub. 1596, 4; Francof. 1621 fol. seine Harmonica Mundi, Lincii 1619 fol. und Apologia adv. Robertum de Fluctibus Francof. 1622 fol. nebst der Epitome Astron. Copernic. Lentiis 1618. 1622, 8; Francof. 1635, 8. Libro IV gehören. Die Theorie dieser Körper ist beym **Euclides** im 13. 14. 15ten Buche der Elemente enthalten, obgleich beyde letzte dem **Hypsicles** aus Alexandrien im 2ten Jahrh. zugeschrieben werden, und ist vom FRANC. FLUSSATE CANDALLA in drey neuen Büchern, dem 16 - 18ten, sehr erweitert worden, bey seiner Ausgabe des **Euclides** Lutet. 1578 fol. Auch hat **Euler** sie einer wiederholten und neuen Untersuchung werth geachtet, in den Novis Elementis Stereometriae Solidorum Tomo IV Nov. Comm. Acad. Petrop. In den meisten Lehrbüchern übergehet man sie; Hr. Hofr. **Karsten** hat sie wieder mitgenommen und im II Th. 26 Abschn. mit Anwendung der sphärischen Trigonometrie

tale abgehandelt. Hieher gehöret insbesondere die Verwandelung eines dieser Körper in den andern, welche vorstehende Tafel voraussetzt; die aber, ohne sie aufs neue zu berechnen, hier aus dem Goldmann und Scheffelt nicht bloß abgeschrieben werden konnte, weil sich im letztern viele Fehler eingeschlichen hatten. Die Gründe ihrer Berechnung hat Goldmann für alle, aber viel zu gedrängt, Scheffelt bloß für das Tetraëdrum erklärt. Es war hoffentlich der Mühe werth, sie nicht wegzulassen, doch ohne dabey die sphärische Trigonometrie vorauszusetzen, sondern bloß mit Beziehung auf erwiesene geometrische Sätze die Analysis zu Hülfe zu nehmen; obgleich dadurch dieser Abschnitt weitläuftiger ausfallen müssen.

§. 2. Erklärungen der in der Tafel vorkommenden Ueberschriften.

Latus Corporis ist die Seite einer ordentlichen Figur, die die Seitenfläche eines ordentlichen Körpers ist. Radius Figurae ist der Halbmesser des um eine solche ordentliche Figur zu beschreibenden Kreises. Perpendiculum Figurae ist die senkrechte Linie, welche aus dem Mittelpuncte des um eine solche Figur zu beschreibenden Kreises auf eine ihrer Seiten trift und sie halbiret. Semicircumferentia Figurae ist der halbe Umfang einer solchen Seitenfläche. Radius Corporis ist der Halbmesser der Kugel, welche um den ordentlichen Körper beschrieben werden kann, in deren Oberfläche also die Spitzen aller seiner körperlichen Winkel treffen. Perpendiculum Corporis ist die senkrechte Linie, welche aus dem Mittelpuncte der um einen ordentlichen Körper zu beschreibenden Kugel auf eine seiner Seitenflächen trift. Soliditas unius Pyramidis ist der Inhalt einer Pyramide, welche der sovielte Theil eines ordentlichen Körpers ist, als er Seitenflächen hat. Soliditas totius Corporis ist also der Inhalt des ganzen Körpers.

§. 3. Allgemeine Aufgabe.

Aus der gegebenen Seite a eines ordentlichen Körpers von 10000 Theilen die Verhältnisse der übrigen im vorigen §. erklärten Abmessungen zu finden.

Auflösung.

I. Das *Tetraëdrum* Tab. V Fig. I.

1) *Radius Figurae* EB. Der Durchmesser der Kugel FG wird von der einen Seitenfläche in E rechtwinklicht durchschnitten; folglich ist wegen der rechten Winkel FEA, FEB, FEC, der gleichen Seiten FA, FB, FC, und der gemeinschaftlichen FE, auch AE = EB = EC, jede also im Halbmesser der Figur. Auch ist ED das Perpendiculum Figurae und zugleich ein Stück von der ganzen CD, und die Drenecke AEB, AEC, CEB sind einander gleich. Folglich ist der Winkel $AEB = \frac{360°}{3} = 120°$, $DEB = 60°$, $EBD = 30°$. Mithin $\sin 60° : DB = \sin tot : EB$. Es sey $\sin tot = 1$, folglich $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, und $\sin 60° = \sqrt{(\sin tot\, q - \cos 60° q)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Demnach $\sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{1}{2} a = 1 : EB$ und also $EB = \frac{1}{2} a : \sqrt{\frac{3}{4}} = a : \sqrt{3}$. Folglich

$$\left.\begin{array}{r} \log a = \log\ 10000 = 4,0000000 \\ \log 3 = 0,4771213 \\ \log \sqrt{3} = 0,2385606 \end{array}\right\}$$

$$\log (a : \sqrt{3}) = 3,7614394$$

Radius Figurae EB = 5773.

2) *Perpendiculum Figurae* ED. Es ist $ED = \sqrt{(EBq) - DBq} = \sqrt{(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \sqrt{\frac{1}{12}a^2} = a : 2\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{r} \log a = 4,0000000 \\ \log 2 = 0,3010300 \\ \log \sqrt{3} = 0,2385606 \\ \log 2\sqrt{3} = 0,5395906 \end{array}$$

$$\log (a : 2\sqrt{3}) = 3,4604094$$

Perpendiculum Figurae ED = 2887.

3) *Semicircumferentia Figurae.* Es ist a = 10000, folglich $\frac{3}{2}$ a = 15000.

4) *Area Figurae* ABC. Diese ist wegen der Gleichheit der Dreyecke AEB, AEC, BEC einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Figur und dessen Höhe dem Perpendiculo Figurae gleich ist. Demnach $\frac{1}{2} \times 3a \times \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Es war

$$\begin{array}{rr} a : 2\sqrt{3} = & 2887 \\ 3a : 2 = & 15000 \\ \hline & 14435 \\ & 2887 \\ \hline \text{Area Figurae} & 43305000 \end{array}$$

5) *Radius Corporis* HB. Weil der Winkel FEB ein rechter ist und die Puncte F.B.E im Umfange eines halben Kreises liegen: so ist FE : EB = EB : EG. Allein $FE = \sqrt{(FBq - EBq)} = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{3}a^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, und $EB = \frac{a}{\sqrt{3}}$; Demnach $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} : \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} : EG$, folglich $EG = \frac{a^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$, $EG + FE = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a + a\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = FG$. Mithin $\frac{1}{2}$ $FG = FH = HB = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r} \log a + \log \sqrt{3} = 4,2385606 \\ \log \sqrt{2} = 0,1505150 \\ \log 2 = 0,3010300 \\ \log 2\sqrt{2} = 0,4515450 \end{array}$$

$$\log (a\sqrt{3} : 2\sqrt{2}) = 3,7870156$$

Radius Corporis HB = 6124

 6) Per-

6) *Perpendiculum Corporis* HE. Es ist $HE = FE - FH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{2a\sqrt{2}\sqrt{2} - a\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{4a - 3a}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}.$$

$\log a = 4,0000000$
$\log \sqrt{3} = 0,2385606$
$\log 2\sqrt{2} = 0,4515450$
$\log 2\sqrt{2}\sqrt{3} = 0,6901056$
$\log (a : 2\sqrt{2}\sqrt{3}) = 3,3098944$
Perpendiculum Corporis HE = 2041

7) *Soliditas unius Pyramidis.* Jeder ordentliche Körper läßt sich in so viel gleiche und ähnliche Pyramiden theilen, als so viel Seitenflächen er hat. Einer solchen Pyramide Grundfläche ist des Körpers Seitenfläche und ihre Höhe ist das Perpendiculum Corporis oder die senkrechte Linie, die aus dem Mittelpuncte der Kugel, welche um den Körper beschrieben werden kann, auf die Seitenfläche in einem Puncte trift, welcher der Mittelpunct des Kreises ist, der sich um die Seitenfläche beschreiben läßt. Demnach

$$\tfrac{1}{4}\ \text{Tetraëdri} = \tfrac{1}{3}\ ABC \times HE = \tfrac{1}{3} \times \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \times \frac{a}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{a^3}{24\sqrt{2}}.$$

Und also, wie sonst, Area Figurae = 43305000
Perpend. Corp. = 2041
ABC × HE = 88385505000
3)
$\tfrac{1}{3}$ ABC × HE = Solid. $\tfrac{1}{4}$ Tetr. = 29461835000

8) *Soliditas totius Corporis.* Es ist daher

$$4 \times \tfrac{1}{4}\ \text{Tetr.} = 4 \times \frac{a^3}{24\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

Solid. $\tfrac{1}{4}$ Tetr. = 29461835000
4 Sol. un. Pyr. = Sol. Tetr. = 117847340000

II. Das Octaëdrum Tab. V Fig. 2.

1) *Radius Figurae* IA ist im gleichseitigen Dreyeck $\frac{a}{\sqrt{3}} = 5773$

2) *Perpendiculum Figurae* IK ist eben so $\frac{a}{2\sqrt{3}} = 2887$

3) *Semicircumferentia Figurae* ist $\tfrac{3}{2}$ a = 15000

4) *Area Figurae* ABF ist $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 43305000$

5) Radius

5) *Radius Corporis* HB. Es ist nämlich der Durchschnitt des Octaëdri ABCD ein Viereck, welches den Durchmesser der Kugel FG in H rechtwinklicht schneidet und halbiret. Folglich ist H der Mittelpunct der Kugel, und also $FH = HB = \sqrt{\tfrac{1}{2} FBq} = \sqrt{\tfrac{1}{2} a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$\log a = 4{,}0000000$$
$$\log \sqrt{2} = 0{,}1505150$$
$$\log (a : \sqrt{2}) = 3{,}8494850$$

Radius Corporis HB = 7071

6) *Perpendiculum Corporis* HI. Weil nämlich FK senkrecht auf AB, auch HK auf AB, und HI auf FK stehet: so ist in dem bey I rechtwinklichten Dreyeck HIK, $HI = \sqrt{(HKq - IKq)} = \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2}{4 \cdot 3})} = \sqrt{\tfrac{1}{6} a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$. Beym Tetraëdro war Perp. Corp. $= \frac{a}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$.

Folglich Perp. Oct. : Perp. Tetr. $= \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}} : \frac{a}{2\sqrt{2}\sqrt{3}} = 2 : 1$

Beym Tetraët. war Perp. Corp. HE = 2041

Folglich ist beym Oct. Perp. Corp. HI = 4082

7) *Soliditas unius Pyramidis.* Es ist

$\tfrac{1}{8}$ Octaëdri $- \tfrac{1}{3}$ ABF $\times$ HI $= \tfrac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$.

Allein es war $\tfrac{1}{4}$ Tetraëdri $= \frac{a^3}{24\sqrt{2}}$.

Demnach $\tfrac{1}{4}$ Tetr. : $\tfrac{1}{8}$ Oct. $= \frac{a^3}{24\sqrt{2}} : \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = 1 : 2$

Solid. $\tfrac{1}{4}$ Tetraëdri = 29461835000
 2

Solid. $\tfrac{1}{8}$ Octaëdri = 58923670000

8) *Soliditas totius Corporis.* Folglich ist $8 \times \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = \frac{2a^3}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Und also Tetr. : Octaëdr. $= \frac{a^3}{6\sqrt{2}} : \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \sqrt{2} = 1 : 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 1 : 4$.

Es war Solid. Tetraëdri = 117847340000
4

4 $\times$ Solid. Tetr. = Solid. Octaëdri = 471389360000

III. Das

III. Das Hexaëdrum Tab. V Fig. 3.

1) *Radius Figurae* E A ist, wie beym Octaëdro der Radius Corporis, $\frac{a}{\sqrt{2}} = 7071$.

2) *Perpendiculum Figurae* E I $= \frac{1}{2}$ a $= 5000$.

3) *Semicircumferentia Figurae* ist 2a $= 20000$.

4) *Area Figurae* ist $a^2 = 100000000$. Mithin auch, wie bey den Seitenflächen der übrigen Körper, Perpend. Fig. $\times \frac{1}{2}$ Circumf. Fig. $= \frac{1}{2}$ a $\times$ 2a $= a^2$.

5) *Radius Corporis* H B. Es ist nämlich $DBq = DAq + ABq = 2a^2$, und $KDq = a^2$, folglich $KDq + DBq = a^2 + 2a^2 = 3a^2 = KBq$, und $KB = a\sqrt{3}$; also $\frac{1}{2} KB = HB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\log a + \log \sqrt{3} = 4,2385606$$
$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log (a\sqrt{3} : 2) = 3,9375306$$

Radius Corporis H B = 8660.

6) *Perpendiculum Corporis* H E ist begreiflich $\frac{1}{2}$ a $= 5000$.

7) *Soliditas unius Pyramidis.* Es ist

$\frac{1}{6}$ Hexaëdri $= \frac{1}{3} \times ABq \times HE = \frac{1}{3} a^2 \times \frac{1}{2} a = \frac{1}{6} a^3$

Also Area Figurae = 100000000

Perpendic. Corporis = 5000

500000000000

3)

Solid. $\frac{1}{6}$ Hexaëdri = $166666666666\frac{2}{3}$

8) *Soliditas totius Corporis* ist $a^3 = 6 \times \frac{1}{6} a^3 = 1000000000000$.

IV. Das Icosaëdrum Tab. V Fig. 4.

1) *Radius Figurae* L A ist im gleichseitigen Dreyeck $\frac{a}{\sqrt{3}} = 5773$.

2) *Perpendiculum Figurae* LK ist eben so $\frac{a}{2\sqrt{3}} = 2887$.

3) *Semicircumferentia Figurae* ist $\frac{3}{2}$ a $= 15000$.

4) *Area Figurae* ABF ist $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 43305000$.

5) *Radius Corporis* FH. In F treffen 5 gleiche gleichseitige Dreyecke zusammen, als die Seitenflächen einer Pyramide, deren Grundfläche ABCDE ein ordentliches Fünfeck ist. Der Durchmesser der Kugel FG wird von der Ebene dieses Fünfecks in I senkrecht durchschnitten, und IE ist der Halbmesser des Kreises, der sich um das Fünfeck beschreiben läßt.

läßt. Es ist aber, diesen Halbmesser I E = r gesetzt, die Seite $a = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, Segners Anal. fin. p. 274; folglich $IE = r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$ und $IEq = \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}$. Allein $FEq = a^2$; Demnach $FIq = FEq - IEq = a^2 - \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{5a^2 - a^2\sqrt{5} - 2a^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{a^2(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}$, folglich $FI = \frac{a\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$. Ferner, weil E I senkrecht auf F I stehet und die Puncte F, E, G im Umfange eines halben Kreises liegen: so ist F I : I E = I E : I G. Demnach $\frac{a\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} : \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} : IG$, woraus $IG = \frac{2a}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$ folget. Es ist daher $FG = FI + IG = \frac{a\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} + \frac{2a}{\sqrt{(3-\sqrt{5}\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}} = \frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$, und so endlich $FH = \frac{1}{2}FG = \frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$.

Hieraus fließt noch folgendes. Weil in ebendemselben Kreise F E = A E die Seite des Fünfecks ist, in welchem I E der Halbmesser oder die Seite des Sechsecks ist, und in dem rechtwinklichten Dreyeck F I E, $FEq = EIq + IFq$: so ist F I die Seite des Zehnecks in diesem Kreise, Euclid. XIII, 10 S. Da nun die Puncte F, E, G im Umfange eines halben Kreises liegen, mithin das Dreyeck F E G rechtwinklicht ist, Euclid. III B. 31 S. in welchem E I auf F G senkrecht stehet: so ist FE : FI = FG : FE. Euclid. VI B. 8 S. und 1 Erkl. d. i. Lat. Pentag. : Lat. Decag. = Diam. Sphaerae : Lat. Icosaëdri. S. Karstens Lehrbegr. II Th. S. 485.

Durch die Rechnung wird $FH = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$ also gefunden. Es ist $\sqrt{5} = 2,236$ also $5-\sqrt{5} = 2,764$ und $3-\sqrt{5} = 0,764$.

$$\begin{array}{rcl}
\log 2,764 &=& 0,4415380 \\
\log \sqrt{2,764} &=& 0,2207690 \\
\log 0,764 &=& -1,8830934 \\
\log \sqrt{0,764} &=& -1,9415467 \\
\log\left(\sqrt{5-\sqrt{5}} : \sqrt{3-\sqrt{5}}\right) &=& 0,2792223 \\
\log \frac{1}{2}a &=& 3,6989700 \\
 && 3,9781923
\end{array}$$

Radius Corporis FH = 9510.

6) *Perpendiculum Corporis* HL. In dem bey L rechtwinklichten Dreyeck HLF ist $HLq = FHq - FLq = \left(\frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{a^2(5-\sqrt{5})}{4(3-\sqrt{5})} - \frac{a^2}{3} = a^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{12-4\sqrt{5}} - \frac{1}{3}\right)$ $= a^2 \times \frac{15-3\sqrt{5}-12+4\sqrt{5}}{36-12\sqrt{5}} = a^2 \times \frac{3+\sqrt{5}}{12(3-\sqrt{5})}$ und also $HL = \frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{3}\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$.

Die Rechnung giebt $3+\sqrt{5}=5,236$, $3-\sqrt{5}=0,764$. Mithin

$$
\begin{aligned}
\log 5,236 &= 0,7\,189996 \\
\log a + \log \sqrt{5,236} &= 4.,3.594998 \\
\log \sqrt{0,764} &= -1.,9\,415467 \\
\log \sqrt{3} &= 0,2\,385606 \\
\log 2 &= 0,3\,010300 \\
\log 2\sqrt{3}\sqrt{(3-\sqrt{5})} &= 0,4\,811373 \\
& \quad 3,8\,783625
\end{aligned}
$$

Perpendiculum Corporis H L = 7557.

7) *Soliditas unius Pyramidis.* Es ist

$$\tfrac{1}{20}\ \text{Icosaëdri} = \tfrac{1}{3} \times ABF \times HL = \tfrac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{3}\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{a^3\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{24\sqrt{(3-\sqrt{5})}}.$$

Also Area Figurae = 43305000

$\tfrac{1}{3}$ Perp. Corp. = 755 : 3 = 2519

Solid. $\tfrac{1}{20}$ Icosaëdri = 109085295000

8) *Soliditas totius Corporis* ist $20 \times \frac{a^3\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{24\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{5a^3\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{6\sqrt{3-\sqrt{5}})}$

Demnach $\tfrac{1}{20}$ Icosaëdri = 109085295000

2 0

Soliditas totius Corporis = 2181705900000

Das Dodecaëdrum Tab. V Fig. 5.

1) *Radius Figurae* K A ist, wie I E beym Icosaëdro Fig. 4, $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$

$$
\begin{aligned}
\log a\sqrt{2} &= 4.,15.0.5.1.50 \\
\log \sqrt{(5-\sqrt{5})} &= 0,2207690 \\
& \quad 3,9297460
\end{aligned}
$$

Radius Figurae K A = 8506.

2) *Perpendiculum Figurae* $KC = \sqrt{(KAq - \tfrac{1}{4}ABq)} = \sqrt{\left(\frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}\right)} =$

$$\frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = \tfrac{1}{2}\,a \times \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}.$$

Es ist $3+\sqrt{5}=5,236$. Demnach

$$
\begin{aligned}
\log 3+\sqrt{5} &= 0,718\,9996 \\
\log \sqrt{(3+\sqrt{5})} &= 0,359.4998 \\
\log \sqrt{(5-\sqrt{5})} &= 0,220\,7690 \\
& \quad 0,138\,7308 \\
\log a : 2 &= 3,698\,9700 \\
& \quad 3,837\,7008
\end{aligned}
$$

Perpendiculum Figurae K C = 6882.

3) *Semi-*

3) *Semicircumferentia Figurae* ist $\frac{5a}{2} = \frac{50000}{2} = 25000$.

4) *Area Figurae* ist $5 \times AKB = 5 \times AC \times KC = 5 \times \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$
$= \frac{5a^2\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{4\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$. Also

$$
\begin{array}{rl}
\text{Perpend. Fig. } KC = & 6882 \\
5 \times AC = 5 \times \tfrac{1}{2} AB = & 25000 \\
\hline
& 34410 \\
& 13764 \\
\hline
\text{Area Figurae} = & 172050000
\end{array}
$$

5) *Radius Corporis* FH. In einem Dodecaëdro läßt sich ein Würfel beschreiben, dessen 12 Seiten Diagonalen der 12 Fünfecke sind, wie etwa die Figur begreiflich machen kann. Eine solche Diagonale läßt sich also finden. Sie sey Tab. V Num. IV Fig. 7, NM, welche LT in Q rechtwinklicht schneide, folglich halbirt. Auch sey LM in R halbirt und RS senkrecht: so ist T der Mittelpunct des Kreises um das Fünfeck. Nun sind wegen den rechten Winkeln TRL, MQL und dem gemeinschaftlichen TLR oder MLQ, die Dreyecke TLR, MLQ ähnlich; folglich TL : TR = ML : MQ, mithin $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$: $\frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = a : \tfrac{1}{2}$ Diag. Pentag. Hieraus folget $MQ = \frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$, und 2MQ $= MN$ d. i. Num. V Fig. 5 $IB = \frac{a\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2(3+\sqrt{5})}$
$= \frac{a}{2}\sqrt{(6+2\sqrt{5})} = \frac{a}{2}\sqrt{(5+2\sqrt{5}+1)} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. Dieses quadrirt giebt $\frac{a^2}{2} \times (3+\sqrt{5})$ und doppelt genommen $a^2(3+\sqrt{5}) = IGq$ dem Viereck der Diagonale des Vierecks. Mithin ist $FGq = FIq + IGq = \frac{a^2(3+\sqrt{5})}{2} + a^2(3+\sqrt{5})$
$= \frac{3a^2\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2}$, $FG = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}}$, und also $\tfrac{1}{2} FG = FH = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$:

Es ist aus dem vorigen

$$
\begin{array}{rl}
\log \sqrt{(3+\sqrt{5})} = & 0,3594998 \\
\log \sqrt{3} = & 0,2385606 \\
\hline
& 0,5980604 \\
\log \sqrt{2} = & 0,1505150 \\
\hline
\log (\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5}} : \sqrt{2}) = & 0,4475454 \\
\log a : 2 = & 3,6989700 \\
\hline
& 4,1465154 \\
\text{Radius Corporis } FH = & 14012
\end{array}
$$

6) *Per-*

6) *Perpendiculum Corporis* HK $= \surd(IHq - IKq) = \surd(FHq - KAq) =$ $\surd\left(\frac{a^2.3.(3+\surd 5)}{4.2} - \frac{a^2.2}{5-\surd 5}\right)$, und nach gehöriger Reduction $\frac{1}{2}a \times \frac{\surd(7+3\surd 5)}{\surd(5-\surd 5)}$.
Es ist $\surd 5 = 2,236$, $3\surd 5 = 6708$, $7+3\surd 5 = 13,708$. Mithin

$$\begin{aligned} \log\ (7+3\surd 5) &= 1,1369741 \\ \log \surd(7+3\surd 5) &= 0,5684870 \\ \log \surd(5-\surd 5) &= 0,2207695 \\ &\overline{0,3477175} \\ \log a : 2 &= 3,6989700 \\ &\overline{4,0466875} \end{aligned}$$

Perpendiculum Corporis HK = 11135

7) *Soliditas unius Pyramidis.* Es ist.

$\frac{1}{12}$ Dodecaëdri $= \frac{1}{3}$ Areae Figurae $\times$ HK $= \frac{1}{3} \times \frac{5a^2\surd(3+\surd 5)}{4\surd(5-\surd 5)} \times \frac{a\surd(7+3\surd 5)}{2\surd(5-\surd 5)}$
$= \frac{5}{24}a^3 \times \frac{\surd(3+\surd 5)\times\surd(7+3\surd 5)}{5-\surd 5} = \frac{5}{24}a^3 \times \frac{\surd((3+\surd 5)(7+3\surd 5))}{5-\surd 5} =$
$\frac{5}{24}a^3 \times \frac{\surd(36+16\surd 5)}{5-\surd 5} = \frac{5}{12}a^3 \times \frac{\surd(9+4\surd 5)}{5-\surd 5} = \frac{5}{12}a^3 \times \frac{\surd(4+4\surd+5)}{5-\surd 5} =$
$\frac{5}{12}a^3 \times \frac{2+\surd 5}{5-\surd 5}$.

Also Area Figurae = 172050000
3) ———
57350000
Perpend. HK = 11135
Soliditas $\frac{1}{12}$ Dodec. = 638592250000

8) *Soliditas totius Corporis* ist $12 \times \frac{5a^3}{12} \times \frac{2+\surd 5}{5-\surd 5} = \frac{5a^3(2+\surd 5)}{5-\surd 5}$.
Demnach $\frac{1}{12}$ Dodec. = 638592250000 (12
127718450 0
Soliditas totius Corporis = 7663107000000

VI. Die Kugel.

Für den Durchmesser von 10000 Theilen, hat der Halbmesser 5000, der Umfang eines ihrer größten Kreise 31416, der halbe Umfang 15708. Mithin ist der Inhalt eines solchen Kreises $15708 \times 5000 = 78540000$, der Kugelfläche 314160000; der Inhalt der Kugel $314160000 \times \frac{10000}{6} = 523600000000 = \frac{314160000 \times 5000}{3}$ Wolfs Auszug Geom. §. 132. 134. 208

§. 4. Be-

§. 4. Besondere Aufgabe.

Wenn die fünf ordentlichen Körper und die Kugel einander gleich sind, die Verhältnis ihrer Seiten und des Durchmessers der Kugel zur Seite des Tetraëdri von 10000 Theilen zu finden.

Auflösung. Wenn man die Seite des Tetraëdri = a setzt, und die Seite der übrigen vier Körper x: so ist vermöge §. 3, für

das Octaëdrum $\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}a^3} = x = 6300$$

das Hexaëdrum $\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = x^3$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{6\sqrt{2}}} = x = 4903$$

das Icosaëdrum $\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = x^3 \times \frac{5\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{6\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{5\sqrt{2}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}} = x = 3780$$

das Dodecaëdrum $\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{5x^3(2+\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3(5-\sqrt{5})}{30\sqrt{2}(5-\sqrt{5})}} = x = 2487$$

In Ansehung der Kugel sey die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise = 1 : π, ihr Durchmesser x: so ist der Umfang ihres größten Kreises πx, die Kugelfläche πx^2, und der Inhalt der Kugel $\frac{\pi x^3}{6} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$, folglich $\sqrt[3]{\frac{a^3}{\pi\sqrt{2}}} = x = 6083$. Die Rechnung ist folgende:

$$\begin{array}{rcl} \log a^3 &=& 12{,}0000000 \\ \log \pi = \log 3{,}1416 &=& 0{,}4971509 \\ \log \sqrt{2} = \log 1{,}4142 &=& 0{,}1505108 \\ && \overline{0{,}6476617} \\ \log x^3 &=& \overline{11{,}3523383} \\ && 3)\overline{} \\ \log x &=& 3{,}7841127 \end{array}$$

Die 6te Figur zeigt die fünf ordentlichen Körper nebst der Kugel, wenn alle gleiche Seiten haben; die 7te Figur aber eben solche Körper, wenn alle gleichen Inhalts sind, nach ihren Seiten von verschiedener Größe.

§. 5. Anmerkung.

Scheffelt berechnet die Seiten der übrigen vier ordentlichen Körper aus der Seite des Tetraëdri von 10000 Theilen also. Erstlich, wie der Inhalt des Octaëdri 471389360000 zu der Seite 10000, so der Inhalt des Tetraëdri 117847340000 zu 2500 (nicht 2502, weil $\frac{1}{4}$ Oct. = Tetr. wenn beyde gleiche Seiten haben). Nun multiplicirt er 2500 mit der Quadratzahl von 10000 d. i. mit 100000000 und ziehet aus dem Producte 250000000000 die Cubicwurzel, welche 6299 oder gerade 6300 ist. Er sucht also

$\text{Oct.} : a = \text{Tetr.} : \frac{a \times \text{Tetr.}}{\text{Oct.}}$ ferner $\frac{a \times \text{Tetr.}}{\text{Oct.}} \times a^2 = \frac{a^3 \times \text{Tetr.}}{\text{Oct.}}$ und endlich $\sqrt[3]{\frac{a^3 \times \text{Tetr.}}{\text{Oct.}}} = x$. Es ist aber $\text{Tetr.} : \text{Oct.} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} : \frac{x^3\sqrt{2}}{3} = 3\,a^3 : 6\,x^3\sqrt{2}\sqrt{2} = a^3 : 4\,x^3 = \frac{1}{4}\,a^3 : x^3$. Folglich wenn man schließt: $\text{Oct.} : a = \text{Tetr.} : z$, so ist, wegen $O = 4\,T$, auch $4\,T : a = T : z$, demnach $z = \frac{1}{4} a$, und $\frac{1}{4}\,a \times a^2 = \frac{1}{4}\,a^3 = x^3$, weil nun $O = T$ ist, folglich $\sqrt[3]{\frac{1}{4}\,a^3} = x$, wie §. 4.

§. 6. Eintheilung der Lineae Reduct. Corp. et Figur. regularium.

I. Was die Theile für die fünf ordentlichen Körper und die Kugel anbetrift: so sind diese §. 4 aus den §. 3 gewiesenen Gründen für die Seite des Tetraëdri von 10000 Theilen berechnet worden. Duplirет diese berechneten Theile und lasset die letzte Ziffer weg: so erhaltet ihr die gesuchte Länge der Seiten in 2000 Theile der Fundamentallinie, welche also von dem Maaßstabe Tab. I aufgetragen werden können.

II. Man pflegt zugleich noch besonders die Reduction des gleichseitigen Dreyecks, Vierecks und Kreises mitzunehmen und auf eben dieser Linie anzubringen, und zwar für die Seite des gleichseitigen Dreyecks von 10000 Theilen; wo also die Zahlen nur aus der Tabula Tetragonica im IV Abschn. nämlich 10000, 6580, 3713 genommen, duplirt, und die letzte Ziffer weggelassen werden durfte.

§. 7. 1 Aufgabe: Ein gleichseitiges Dreyeck in ein Viereck oder in einen Kreis zu verwandeln.

Auflösung. Stellet Tab. V Fig. 8 die Seite des gleichseitigen Dreyecks AB auf dieser Lin. Red. überzwerch zwischen dessen Zeichen, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen den Zeichen des Vierecks und des Kreises: so sind die ihnen gleiche BC, DE, jene die Seite des Vierecks, diese der Durchmesser des Kreises, welche dem gegebenen gleichseitigen Dreyeck gleich sind; vergl. mit IV Abschn. §. 7 f.

§. 8. 2 Aufgabe: Zu der gegebenen Seite eines ordentlichen Körpers die Seiten der ihm gleichen übrigen vier ordentlichen Körper und den Durchmesser der ihm gleichen Kugel zu finden. Oder: Einen gegebenen ordentlichen Körper in einen andern und in eine Kugel zu verwandeln.

Auflösung. Es sey Tab. V Fig. 9 die Seite eines Hexaëdri oder Würfels AB gegeben. Stellet sie auf der Lin. Red. überzwerch zwischen das Zeichen des Würfels, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen den Zeichen des Tetraëdri CD, des Octaëdri EF, der Kugel LM, des Icosaëdri GH, des Dodecaëdri IK: so sind diese Linien die gesuchten Seiten.

Durch die Rechnung aus der Tafel. Es sey die Seite des Würfels z'. Demnach 4903 : 10000 = z' : Lat. Tetr.

$$) 20.0.0.0 f 4'0''7'''$$
$$\underline{19612}$$
$$38870$$
$$\underline{34321}$$

Auf diese Art hat sich die 7te Figur ergeben.

§. 9. 3 Aufgabe: Umgekehrt, eine gegebene Kugel in einen ordentlichen Körper zu verwandeln.

Auflösung. Stellet Tab. V Fig. 9 den Durchmesser der Kugel LM überzwerch auf der Lin. Red. zwischen das Zeichen der Kugel, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen den Zeichen des Dodecaëdri IK, des Icosaëdri GH, des Hexaëdri AB, des Octaëdri EF und des Tetraëdri CD, welches die gesuchten Seiten der Körper sind.

Durch die Rechnung aus der Tafel. Wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher der Erdkugel gleich wäre? Ihr Durchmesser hat 1720 geographische Meilen. Mithin 7426 : 4903 = 1720 : Lat. Cubi.

$$\log 1720 = 3{,}2355284$$
$$\log 4903 = \underline{3{,}6904619}$$
$$6{,}9.2599.0.3$$
$$\log 7426 = \underline{3{,}8707549}$$
$$3{,}0552354$$

Die Seite $1135\frac{1}{2}$ Meile.



VII. Von

VII. Von der Linea Corporum Sphaerae inſcribendorum.

TABULA

Laterum Corporum Regularium eidem Sphaerae inſcribendorum.

	EX CALCULO	PARTES
Diam. Sph.	10000	2000
Latera		
Tetraëdri	8165	1633
Octaëdri	7071	1414
Hexaëdri	5773	1155
Icoſaëdri	5258	1051
Dodecaëdri	3568	713

§. 1. Erklärung und Abſicht dieſer Linie.

Dieſe Linie giebt die Verhältnis der Seiten der fünf ordentlichen Körper zu dem Durchmeſſer der Kugel an, in welcher dieſe fünf Körper beſchrieben werden können. Folglich kann man vermittelſt derſelben zu jedem gegebenen Durchmeſſer einer Kugel die ihr zukommenden Seiten der fünf ordentlichen Körper finden.

§. 2. Gründe der Berechnung dieſer Tafel.

Man kann dieſe Tafel auf zweyerley Art berechnen.

Die erſte. Da in Berechnung der Tabulae pro transmutandis Corporibus regularibus im VI Abſchn. §. 3, für jeden ordentlichen Körper der Radius Corporis aus deſſen gegebener Seite gefunden worden: ſo läßt ſich die jedesmalige Gleichung ſehr leicht ſo reduciren, daß die Seite aus dem gegebenen Radio Corporis oder dem Halbmeſſer der Kugel gefunden werde, in welche ſich die ordentlichen Körper beſchreiben laſſen. Wenn alſo der Halbmeſſer der Kugel r, die Seite des ordentlichen Körpers a heißt: ſo iſt

I. Beym *Tetraëdro* $r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, folglich $a = 2r \times \sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

II. Beym *Octaëdro* $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, demnach $a = r\sqrt{2}$.

III. Beym *Hexaëdro* $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, alſo $a = 2r : \sqrt{3}$.

IV. Beym *Icoſaëdro* $r = \frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$, mithin $a = 2r \times \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$.

V. Beym

V. Beym *Dodecaëdro* $r = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$, daher $a = 2r \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}$:

Die Rechnung vermittelst der Logarithmen ist daher folgende.

I. *Lat. Tetraëdri* $= 2r \times \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 2r \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{2} &= 0{,}1505150 \\ \log \sqrt{3} &= 0{,}2385606 \\ \log(\sqrt{2} : \sqrt{3}) &= -\ 1{,}9119544 \\ \log 2r = \log 10000 &= 4{,}0000000 \\ \log(2r \times \sqrt{2} : \sqrt{3}) &= 3{,}9119544 \end{aligned}$$

die Seite des Tetraëdri 8165.

II. *Lat. Octaëdri* $= r\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{2} &= 0{,}1505150 \\ \log 5000 = \log r &= 3{,}6989700 \\ \log r\sqrt{2} &= 3{,}8494850 \end{aligned}$$

die Seite des Octaëdri 7071

III. *Lat. Hexaëdri* $= \frac{2r}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \log 2r &= 4{,}0000000 \\ \log \sqrt{3} &= 0{,}2385606 \\ \log(2r : \sqrt{3}) &= 3{,}7614394 \end{aligned}$$

die Seite des Hexaëdri 5773.

IV. *Lat. Icosaëdri* $= 2r \times \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$

$$\begin{aligned} \log 2r &= 4{,}0000000 \\ \log \sqrt{(3-\sqrt{5})} &= -\ 1{,}9415467 \\ \log(2r\sqrt{(3-\sqrt{5})}) &= 3{,}9415467 \\ \log \sqrt{(5-\sqrt{5})} &= 0{,}2207690 \\ \log(2r\sqrt{(3-\sqrt{5})} : \sqrt{(5-\sqrt{})}) &= 3{,}7207777 \end{aligned}$$

die Seite des Icosaëdri 5258.

V. *Lat. Dodecaëdri* $= 2r \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}$

$$\begin{aligned} \log 2r &= 4{,}0000000 \\ \log \sqrt{2} &= 0{,}1505150 \\ \log 2r\sqrt{2} &= 4{,}1505150 \\ \log \sqrt{3} &= 0{,}2385606 \\ \log \sqrt{(3+\sqrt{5})} &= 0{,}3594998 \\ \log \sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})} &= 0{,}5980604 \\ \log(2r\sqrt{2} : \sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}) &= 3{,}5524546 \end{aligned}$$

die Seite des Dodecaëdri 3568.

Die zweyte beruhet auf Euclid. XIII B. 18 S. wo durch folgende sehr leichte Zeichnung zu dem gegebenen Durchmesser einer Kugel AB Tab. VI Fig. 1 die Seiten aller fünf ordentlichen Körper gefunden werden, welche in dieser Kugel beschrieben werden können. Halbiret also AB in C und beschreibet darüber einen halben Kreis. Theilet AB in drey gleiche Theile, so daß $AD = \frac{2}{3} AB$, $DB = \frac{1}{3} AB$ sey. Errichtet DF senkrecht und ziehet AF, BF. Errichtet CE senkrecht und ziehet AE, EB. Errichtet $AG = AB$ senkrecht, und ziehet GC, welche den halben Umfang in H schneidet. Fället von H auf AB das Loth HK und ziehet AH. Schneidet endlich BF nach dem äußern und mittlern Verhältnis in N, nach Euclid. VI B. 30 S. oder auf folgende sehr leichte Art. Halbiret BF in M, beschreibet über BF einen halben Kreis, errichtet $IF = FB$ senkrecht, ziehet IM, welche den halben Umfang in L schneidet; schneidet endlich $BN = IL$ von BF ab. So ist

AF die Seite des Tetraëdri
BE die Seite des Octaëdri
BF die Seite des Hexaëdri
AH die Seite des Icosaëdri
BN die Seite des Dodecaëdri.

Es sey $AC = CD = r$, also $AB = 2r$, jede Seite $= a$. Demnach

I. Für die Seite des *Tetraëdri*. $AD : DF = DF : DB$ Euclid. VI B. 8. 13 S. D. i. $\frac{2}{3} \times 2r : DF = DF : \frac{1}{3} \times 2r$, folglich $DFq = \frac{8}{9} r^2$, und $ADq = \frac{16}{9} r^2$, demnach $AF = \sqrt{(ADq + DFq)} = \sqrt{(\frac{16}{9} r^2 + \frac{8}{9} r)} = \sqrt{\frac{24}{9} r^2} = \frac{2}{3} r \sqrt{6} = \frac{2}{3} r \sqrt{2} \sqrt{3}$ $= \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a$, wie oben.

II. Für die Seite des *Octaëdri*. $BE = \sqrt{(BCq + CEq)} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} = a$, wie vorher.

III. Für die Seite des *Hexaëdri*. $BF = \sqrt{(DFq + DBq)} = \sqrt{(\frac{8}{9} r^2 + \frac{4r^2}{9})} =$ $\sqrt{\frac{12}{9} r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r = \frac{2r}{\sqrt{3}} = a$, wie vorher.

IV. Für die Seite des *Icosaëdri*. Es ist $CG = \sqrt{(AGq + ACq)} = \sqrt{(4r^2 + r^2)}$ $= \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$. Ferner $CG : CH = CA : CK$, d. i. $r\sqrt{5} : r = r : CK$, demnach $CK = \frac{r^2}{r\sqrt{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}}$. Auch ist $KH = \sqrt{(CHq - CKq)} = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{5} r^2)} = \sqrt{\frac{4}{5} r^2}$ $= \frac{2r}{\sqrt{5}}$, und $AK = CA - CK = r - \frac{r}{\sqrt{5}} = r \times \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}$, demnach $AKq = r^2 \times \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{5}$ $= r^2 \times \frac{6 - 2\sqrt{5}}{5} = 2r^2 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{5}$, und $KHq = \frac{4}{5} r^2$, folglich $AHq = AKq + KHq$ $= 2r^2 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3} + \frac{4}{5} r^2 = \frac{2}{5} r^2 (3 - \sqrt{5} + 2) = \frac{2}{5} r^2 (5 - \sqrt{5})$, folglich $AH = \sqrt{(\frac{2}{5} r^2 (5 - \sqrt{5}))}$. Es ist aber $\sqrt{(\frac{2}{5} r^2 (5 - \sqrt{5}))} = \frac{2r\sqrt{(3 - \sqrt{5})}}{\sqrt{(5 - \sqrt{5})}}$. Denn $\sqrt{(\frac{2}{5} r^2 (5 - \sqrt{5}))} = r \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\times$

$$\times \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = r \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = 2r \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = 2r \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = 2r \times \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = 2r \times \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5}+1)}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$
$$= 2r \times \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = 2r \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$
$$= 2r \times \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = a,$$ wie oben.

V. Für die Seite des *Dodecaëdri*. Es ist $IMq = IFq + FMq = BFq + \frac{1}{4} BFq = \frac{5}{4} BFq$, folglich $IM = \frac{BF}{2}\sqrt{5}$ und $IL = IM - ML = \frac{BF}{2}\sqrt{5} - \frac{BF}{2} = \frac{1}{2} BF(\sqrt{5}-1) = BN$. Allein $BF = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, folglich $BN = \frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{5}-1)$. Es ist aber $\frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{5}-1) = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}$. Denn $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{3}}$
$$= \frac{2r}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})} \times \sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = \frac{2r}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$$
$$\times \frac{\sqrt{((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))}}{\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = \frac{2r}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{(9-5)}}{\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = \frac{2r \times \sqrt{4}}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{2 \times 2r}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}} = a$$ wie oben.

§. 3. Anmerkung.

Es ist der Mühe werth, Scheffelts Unterricht, wie die Tafel ausgerechnet werde, mit dem bisherigen zu vergleichen. Man setze den Durchmesser der Kugel $d = 2r$: so ist

I. *Latus Tetraëdri* $= \sqrt{\frac{2}{3} d^2} = \sqrt{\frac{2}{3} \times 4r^2} = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ wie §. 2.

$d^2 = 100000000$
$2d^2 = 200000000$
$\frac{2}{3} d^2 = 66666666$
$\sqrt{\frac{2}{3} d^2} = 8165$

II. *Latus Octaëdri* $= \sqrt{\frac{1}{2} d^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 4r^2} = r\sqrt{2}$ wie §. 2.

$d^2 = 100000000$
$\frac{1}{2} d^2 = 50000000$
$\sqrt{\frac{1}{2} d^2} = 7071$

 III. Latus

III. *Latus Hexaëdri* $= \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3} \times 4r^2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ wie §. 2.

$$d^2 = 100000000$$
$$\tfrac{1}{3}d^2 = 33333333$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = 5773$$

IV. *Latus Icosaëdri.* Man suche $\sqrt{\tfrac{1}{5}d^2} = \sqrt{\tfrac{1}{5} \times 4r^2} = \frac{2r}{\sqrt{5}}$.

$$d^2 = 100000000$$
$$\tfrac{1}{5}d^2 = 20000000$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{5}d^2} = 4472$$

Es war nämlich der Durchmesser der Kugel VI Abschn. §. 3. IV. 5, aus der Seite des eingeschriebenen Icosaëdri $\frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$, und der Halbmesser des Fünfecks, dessen Seite a die Seite des Icosaëdri ist, $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$. Man schließe also: Wie der Durchmesser der Kugel zum Halbmesser des Fünfecks, so der gegebene Durchmesser zum Halbmesser des ihm zugehörigen Fünfecks, welcher x heiße. Demnach $\frac{a\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} : \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = d : x$. Dieses giebt $\sqrt{(5-\sqrt{5})}.\sqrt{(5-\sqrt{5})} : \sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})} = d : x$; mithin $5-\sqrt{5} : \sqrt{(2(3-\sqrt{5}))} = 5-\sqrt{5} : \sqrt{(6-2\sqrt{5})} = 5-\sqrt{5} : \sqrt{5}-1 = d : x$, und quadrirt $25-10\sqrt{5}+5 : 6-2\sqrt{5} = 30-10\sqrt{5} : 6-2\sqrt{5} = 5(6-2\sqrt{5}) : 6-2\sqrt{5} = 5 : 1 = d^2 : x^2$, folglich $\sqrt{\tfrac{1}{5}d^2} = x^2$. Hierauf schließe man: Wie der Halbmesser eines Fünfecks zu dessen Seite, so der dem gegebenen Durchmesser der Kugel zugehörige Halbmesser des Fünfecks zur Seite des Fünfecks oder zur Seite des Icosaëdri. Mithin

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} : a = \frac{2r}{\sqrt{5}} : \text{Lat Icosaëdri.}$$

Für $a = 10000$ ist $\log a + \log\sqrt{2} = 4,1505150$
$\log\sqrt{(5-\sqrt{5})} = 0,2207690$
$3,9297460$

Die Seite 8507

Demnach $8507 : 10000 = 4427$: Lat. Icosaëdri
$\log 4472 + \log 10000 = 7,6505018$
der vorige $\log 8507 = 3,9297460$
$3,7207558$

Latus Icosaëdri = 5257

Aus obiger Proportion nämlich folgt

$$\text{Lat. Icosaëdri} = \frac{2r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{2r(5-\sqrt{5})}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = \frac{2r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = \frac{2r\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$
$$= \frac{2r\sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{2}\sqrt{(5-\sqrt{5})}} = \frac{2r\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}$$ wie vorher §. 2.

V. La-

V. *Latus Dodecaëdri.* Diese Seite ergiebt sich leicht aus der Theilung der Seite des Würfels nach dem äußern und mittlern Verhältniß, beym Euclid. VI B. 30 S. oder II B. 11 S. Beschreibet Tab. VI Fig. 2, das Viereck B F O P. Halbiret B P in Q, verlängert P B in R, ziehet Q F, machet Q R = Q F, und B N = B R. Demnach wegen B F = 5773

$$\begin{aligned} \text{ist } BFq &= 33327529 \\ BQq = \tfrac{1}{4} BFq &= \underline{8331882} \\ BFq + BQq = FQq &= 41659411 \\ FQ = QR &= 6454 \\ \tfrac{1}{2} FB = BQ &= \underline{2886} \\ BN = BR &= 3568 \end{aligned}$$

Und also auch wegen $BF = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, $BFq = \frac{4r^2}{3}$, $\frac{1}{4} BFq = \frac{r^2}{3}$, $FQq = \frac{5r^2}{3}$,

$FQ = \frac{r\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $FQ - \frac{1}{2} FB = \frac{r\sqrt{5}}{\sqrt{3}} - \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}$, wie §. 2.

§. 4. Eintheilung der Lineae Corporum Sphaerae inscribendorum.

Diese erfordert also die §. 2 oder §. 3 gefundenen fünf Zahlen, und zwar mit Weglassung der letzten Ziffer, entweder für den tausendtheilichten Maßstab, oder, wenn man die Zahlen duplirt, für den zweytausendtheilichten, wie im VI Abschn. §. 6. N. 1.

§. 5. 1 Aufgabe: Die Seiten der fünf ordentlichen Körper zu finden, welche in einer gegebenen Kugel beschrieben werden können.

Auflösung. Stellet Tab. VI Fig. 3 den gegebenen Durchmesser A B auf der Lin. Corp. Sph. inscr. überzwerch zwischen das Zeichen der Kugel: und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen den Zeichen des Tetraëdri C D, des Octaëdri E F, des Hexaëdri G H, des Icosaëdri I K und des Dodecaëdri L M, welches die gesuchten Seiten der Körper sind.

Durch die Rechnung nach der Tafel. Wie groß sind die Seiten der fünf ordentlichen Körper, welche sich in der Erdkugel beschreiben ließen, deren Durchmesser 1720 geograph. Meilen hat? Demnach

$$\begin{aligned} 10000 : 1720 = 8165 &: \text{Lat. Tetraëdri} \\ \log 8165 &= 3{,}9119562 \\ \log 1720 &= \underline{3{,}2355284} \\ & 3{,}1474846 \end{aligned}$$

Lat. Tetraëdri 1404, 4 Meilen.

10000 : 1720 = 7071 : Lat. Octaëdri
log 7071 = 3,8494808
log 1720 = 3,2355284
3,0850092
Lat. Octaëdri 1216,2 Meilen.

10000 : 1720 = 5773 : Lat. Hexaëdri
log 5773 = 3,7614016
log 1720 = 3,2355284
2,9969300
Lat. Hexaëdri 993 Meilen.

10000 : 1720 = 5258 : Lat. Icosaëdri
log 5258 = 3,7208206
log 1720 = 3,2355284
2,9563490
Lat. Icosaëdri 904,4 Meilen.

10000 : 1720 = 3568 : Lat. Dodecaëdri
log 3568 = 3,5524248
log 1720 = 3,2355284
2,7879532
Lat. Dodecaëdri 613,7 Meilen.

§. 6. 2 Aufgabe: Umgekehrt, aus der gegebenen Seite eines ordentlichen Körpers den Durchmesser der Kugel zu finden, welche um den Körper beschrieben werden kann.

Auflösung. Stellet die gegebene Seite z. E. Tab. VI Fig. 4 des Hexaëdri oder Würfels NO auf der Lin. Corp. Sph. inscr. überzwerch zwischen dessen Zeichen, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen dem Zeichen der Kugel: so ist die ihr gleiche PQ der gesuchte Durchmesser.

Durch die Rechnung wird der Durchmesser auch umgekehrt gefunden, z. E. zu einem Würfel, dessen Seite 1 F. ist, findet man den Durchmesser der Kugel aus 5773 : 10.0.0.0 = 1 F. : 1 F. 7 Z. 5 L.

5773
42.270
40411
18590
17325

§. 7.

§. 7. 3 Aufgabe: Zu der gegebenen Seite eines ordentlichen Körpers die Seite eines andern ordentlichen Körpers zu finden, der mit dem gegebenen zu einerley Kugel gehört.

Auflösung. Stellet die gegebene Seite z. E. Tab. VI Fig. 5 des Hexaëdri oder Würfels RS auf der Lin. Corp. Sph. inscr. überzwerch zwischen dessen Zeichen, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen dem Zeichen des gesuchten Körpers z. E. des Dodecaëdri: so ist die ihr gleiche TV die gesuchte Seite. Es sey die Seite des Würfels 1 F. wie groß ist die Seite des Dodecaëdri, welches mit ihm zu einerley Kugel gehöret? Demnach

```
5773 : 3568 = 1 F : 6 Z. 1 L. 8 Scr.
   ) 3568.0 f
     34638
      10.4.2.0
       5773
       46470
       46184
```

§. 8. 4 Aufgabe: Den Halbmesser der Kugel zu finden, die sich in einem gegebenen ordentlichen Körper beschreiben läßt.

Auflösung. Ein ordentlicher Körper ist in einer Kugel, oder eine Kugel ist um einen ordentlichen Körper beschrieben, wenn die Spitzen aller körperlichen Winkel mit der Kugelfläche zusammentreffen. Hingegen ist ein ordentlicher Körper um eine Kugel, oder eine Kugel in einem ordentlichen Körper beschrieben, wenn alle Seitenflächen (Hedrae) des Körpers die Kugelfläche berühren. Dieses vorausgesetzt, so erhellet aus Betrachtung der ersten 5 Figuren Tab. V N. 5, 1) daß die in der Tafel des VIten Abschn. berechnete Perpendicula Corporum, im Tetraëdro HE, im Octaëdro HI, im Hexaëdro HE, im Icosaëdro HL und im Dodecaëdro HK die Halbmesser der Kugeln sind, welche in ihnen beschrieben werden können; und 2) daß ein jeder solcher Halbmesser das Loth eines rechtwinklichten Dreyecks sey, dessen Grundlinie der Radius Figurae, die Hypotenuse aber der Radius Corporis ist; VI Abschn. §. 2; folglich 3) der jedesmalige Berührungspunct einer Seitenfläche mit der innern Kugelfläche der Mittelpunct des Kreises sey, der sich um die Seitenfläche beschreiben läßt. Mithin kann der gesuchte Halbmesser der innern Kugel auf zweyerley Art gefunden werden.

1) **Durch die Zeichnung**, vermittelst des Pr. Z. Es sey z. E. Tab. VI Fig. 6 AB die Seite des Würfels. Beschreibet über AB ein Viereck, und um dieses einen Kreis. Halbiret die Seite AB in D. Ziehet den Durchmesser CF. Stellet AD = ½ AB d. i. die halbe Seite auf der Lin. Corp. Sph. inscr. überzwerch zwischen das Zeichen des Würfels;

und

und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen dem Zeichen der Kugel: so ist diese der Radius Corporis. Nun ist CF = FB der Radius Figurae. Beschreibet also über CB mit dem Radio Corporis das gleichschenklichte Dreyeck CEB und ziehet EF: so stehet EF wegen CE = EB, CF = FB, auf CB senkrecht; und es ist EF das Perpendiculum Corporis, wie vorher gewiesen worden. Eben so sey Fig. 7, GH die Seite des Dodecaëdri. Beschreibet darüber das Fünfeck, und um dieses einen Kreis. Halbiret die Seite GH in L. Ziehet mit ihr den Durchmesser IK parallel. Stellet GL = ½ GH d. i. die halbe Seite auf der Lin. Corp. Sph. inscr. zwischen das Zeichen des Dodecaëdri überzwerch, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen dem Zeichen der Kugel: so ist diese der Radius Corporis. Nun ist IM = MK der Radius Figurae. Beschreibet also über IK mit dem Radio Corporis das gleichschenklichte Dreyeck INK und ziehet NM: so stehet NM wegen IM = MK, IN = NK, auf IK senkrecht; und es ist NM das Perpendiculum Corporis, vermöge des obigen.

II. Durch die Rechnung. Z. E. die Seite eines Würfels sey 2 Zoll. Mithin

10000 : 5000 = 2 Z : 1 Z.

Die Seite eines Dodecaëdri sey auch 2 Zoll. Folglich

10000 : 11135 = 2 : 2 Z. 2 Lin. 2, 7 Scr.

2
|22270

VIII. Von

VIII. Von der Linea Tangentium.

TABULA

Tangentium ad Radium 10000 Partium.

Gradus.	Tangens.	Gradus.	Tangens.	Gradus.	Tangens.	Gradus.	Tangens.	Gradus.	Tangens.
1.	175	14.	2493	27.	5095	40.	8391	53.	13270
2.	349	15.	2679	28.	5317	41.	8693	54.	13764
3.	524	16.	2867	29.	5543	42.	9004	55.	14281
4.	699	17.	3057	30.	5773	43.	9325	56.	14826
5.	875	18.	3249	31.	6009	44.	9656	57.	15399
6.	1051	19.	3443	32.	6249	45.	10000	58.	16003
7.	1228	20.	3640	33.	6494	46.	10355	59.	16643
8.	1405	21.	3839	34.	6745	47.	10724	60.	17320
9.	1584	22.	4040	35.	7002	48.	11106	61.	18040
10.	1763	23.	4245	36.	7265	49.	11504	62.	18807
11.	1944	24.	4452	37.	7536	50.	11918	63.	19626
12.	2126	25.	4663	38.	7813	51.	12349	64.	20503
13.	2309	26.	4877	39.	8098	52.	12799	65.	21445

§. 1. Erklärung und Absicht dieser Linie.

Diese Linie dienet, die Größe eines Winkels durch die Tangente eines Bogens, der zwischen seinen beyden Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben werden kann, aus deren beständiger Verhältnis zu dem Halbmesser zu bestimmen, mithin die Verhältnis dieses Bogens zum ganzen Umkreise zu finden, welcher die Verhältnis des gegebenen Winkels zu vier rechten gleich ist, verglichen mit den Scholiis zum letzten Satze des VI. B. Euclidis der Bärmann. Ausgabe. Weil also Tab. VI. Fig. 1, CD: DB = CA: AE, d. i. für einen Bogen AB überhaupt, cos. AB: sin AB = sin tot: tan AB ist, und die Sinusse für jeden gegebenen Bogen in Theilen des Halbmessers sich berechnen lassen: so ergeben sich nach der Regel Detri für eben diese Bogen auch ihre Tangenten in Theilen des Halbmessers.

§. 2. Eintheilung und Einrichtung der Linea Tangentium.

Wenn in eben dieser Figur AB = 45° ist: so ist der Winkel BCD = DBC = ½ R. folglich CD = BD. Da nun überhaupt CD: DB = CA: AE, so ist für AB = 45°, CA = AE d. i. tan 45° = dem sinus totus. Man gebe daher dem tan 45° oder den Halbmesser 10000 gleiche Theile; so findet man schon für so viele Theile des Halbmessers, gemeiniglich für 10000000 Theile desselben, ausgerechnete Tafeln der Tangente, aller Grade und Minuten, auch wohl

kleinerer Bogen; aus welchen mit Weglassung der drey letzten Ziffern vorstehende Tafel entlehnt werden können. Nun hätte man zwar auf beyden Schenkeln des Proportionalzirkels die Lin. Tang. ziehen und aus dem zweytausendtheilichten Maaßstabe die Tangenten bis zum 63 Gr. austragen können, indem die Tangente von 63°26′5″.... die doppelte Tangente von 45° oder der doppelte Halbmesser ist. Allein da hätten beyde Linien bis an den Mittelpunct des Proportionalzirkels gezogen werden und in dessen Nähe die ersten Theile angegeben werden müssen; welches, besonders bey einem kleinen Werkzeuge, sehr leicht eine Verwirrung verursachen würde. Man hat daher lieber die Lin. Tang. auf beyden Füßen zur Seite so angebracht, daß, wenn der Zirkel ganz eröffnet wird, sie in einem fort sich erstreckt, und so zu einer Probe von der Güte des Werkzeuges dienet. Hier ist also die halbe Fundamentallinie zum Halbmesser oder tan 45° angenommen, und so sind die übrige Tangenten mit Weglassung der letzten Ziffer nach der Tafel aus dem zweytausendtheilichten Maaßstabe aufgetragen worden, für jeden andern gegebenen Halbmesser muß man die Tangenten mit Hülfe der Lin. arithm. suchen; wohin folgende Aufgaben gehören.

§. 3. 1 Aufgabe: Die Länge der Tangente eines in Graden gegebenen Winkels in 1000 Theilen des Halbmessers zu finden, folglich die Tafel der Tangenten ohne Rechnung zu verfertigen.

Auflösung. Es sey Tab. VI. Fig. 2, der Winkel ACB, oder eigentlich sein so genanntes Maaß, der Bogen AB=40°, der Halbmesser AC: Man suchet die Länge der Tangente AD. Stellet den Halbmesser AC auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100, und unverrückt versuchet, zwischen welche Zahl die Tangente AD überzwerch treffe. Da sie nun ziemlich genau zwischen 84 trifft: so hat für den Sin. tot. von 100 Theilen, die tan 40° solcher Theile 84.

Anders oder vielmehr Probe der *Lin. Tang.* Stellet die tan 45° der Lin. Tang. also den Halbmesser dieser Linie auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100. Nehmet tan 40° dieser Linie und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl der Lin. arithm. sie überzwerch treffe. Ist diese ohne eine merkliche Abweichung 84: so ist tan 40° richtig aufgetragen.

§. 4. 2. Aufgabe: Einen Winkel vermittelst der Lineae Tangentium zu messen.

Auflösung. Es sey Tab. VI. Fig. 3. der Winkel F gegeben. Errichtet aus einem beliebigen Puncte E des einen Schenkels eine senkrechte Linie EG. Stellet EF auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100 und versuchet unverrückt, zwischen welcher Zahl sich EG überzwerch stellen lasse. Diese sey 90. Stellet Tang 45° auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 90; so ist diese auf der Lin. Tang gestellt, die Tang. 42° ohne einen merklichen Fehler. Folglich ist der Winkel F=42°.

§. 5. 3 Aufgabe: Die Länge der Secante eines gegebenen Winkels in Theilen des Halbmessers zu finden.

Auflösung. Es sey Tab. VI. Fig. 4, der gegebene Winkel H. Beschreibet aus H mit H I einen Bogen IL. Errichtet aus I eine senkrechte Linie, welche von der verlängerten HL in K durchschnitten werde: so ist HI der Sinus totus, IK die Tangente und HK die Secante des Bogens IL oder des Winkels H. Stellet HI auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100 und versuchet unverrückt, zwischen welcher Zahl sich HK überzwerch stellen lasse. Ist aber HK größer, als die unverrückte Weite zwischen 200: so versuchet unverrückt, zwischen welcher Zahl das Stücke KL überzwerch treffe, zu welcher also 100 addirt werden muß. Ist z. E. IL = 60°: so trifft HK auf der Lin. arithm. genau zwischen 200°. Wäre IL = 70½: so trifft KL ohne einen merklichen Fehler zwischen 200 und es ist KL + LH = KH = 300.

§. 6. 4 Aufgabe: Einen Winkel von einer gegebenen Größe zu zeichnen.

Auflösung. Es soll z. E. Tab. VI. Fig. 5 an M ein Winkel von 30° gezeichnet werden. Stellet von der Lin. Tang. die Tang 30° auf der Lin. arithm. gerade: so sind solches 57¾ Theile. Stellet NM auf der Lin. arithm. zwischen 100 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 57¾. Errichtet aus N das Loth NO und machet NO der Weite zwischen 57¾ gleich, und ziehet OM: so ist ON = Tan 30° für den Halbmesser MN, folglich OMN der gesuchte Winkel.

§. 7. Folgerung für die Eintheilung des Umkreises in seine Grade.

Auf diese Art kann vermittelst der Lin. Tang. oder mit Zuziehung der Tafel vermittelst eines verjüngten Maaßstabes jeder Umkreis in seine einzele Grade eingetheilt werden, wie Tab. VI Fig. 6 zeiget. Aus dieser und aus der Fig. 7 ist zu ersehen, daß, weil Tan 45° dem Halbmesser gleich ist, man nur von P nach Q die Tangenten von 0, 45° und eben diese von R nach Q auftragen darf.

§. 8. 5 Aufgabe aus der Optik.

An einem Gebäude ist in einer Höhe von 40 F. eine 7 F. hohe Statue aufgestellt; es soll aber in einer Höhe von 80 F. eine andere Statue aufgestellt werden. Wie hoch muß diese seyn, daß in einer Weite von 50 F. beyde Statuen gleich groß erscheinen?

Auflösung. Es sey Tab. VI Fig. 8. AB = 50, BC = 40, CD = 7, BE = 80 F. und EF die gesuchte Höhe. Die Optik lehret, daß FE so groß, als DC, in A erscheine, wenn die scheinbare Größe von FE oder der optische Winkel FAE, der scheinbaren Größe von DC oder dem optischen Winkel DAC gleich ist.

Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 50 Theile wegen AB und stellet diese auf ihr überzwerch zwischen 100. Nehmet auf ihr gerade 40 Theile wegen BC und versuchet unverrückt,

zwischen welcher Zahl diese Weite überzwerch treffe; welche 80 ist. Nehmet gerade 80 Theile und stellet diese auf die Lin. Tang. so ist der Winkel $CAB = 38^{\circ}\frac{3}{4}$.

Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 47 Theile wegen $BC + CD = BD$, und versuchet noch unverrückt, zwischen welcher Zahl diese Weite überzwerch treffe; welche 94 ist. Nehmet gerade 94 Theile und stellet diese auf die Lin. Tang. so ist der Winkel $DAB = 43^{\circ}\frac{1}{4}$, folglich der optische Winkel $DAC = DAB - CAB = 43^{\circ}\frac{1}{4} - 38^{\circ}\frac{3}{4} = 4^{\circ}\frac{1}{2}$ für die Statue, deren Höhe CD 7 F. ist.

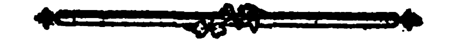
Eben so nehmet auf der Lin. arithm. gerade 80 Theile wegen BE, und versuchet noch unverrückt, zwischen welcher Zahl diese Weite überzwerch treffe; welche 160 ist. Nehmet gerade 60 Theile und stellet diese auf das andere Stücke der Lin. Tang. so hat der Winkel EAB 58°.

Da nun $FAE = DAC = 4^{\circ}\frac{1}{2}$: so ist $FAB = EAB + FAE = 58^{\circ} + 4^{\circ}\frac{1}{2} = 62^{\circ}\frac{1}{2}$. Nehmet das Stücke für die Tan $60^{\circ}\frac{1}{2}$ vom andern Stücke der Lin. Tang. stellet solches auf der Lin. arithm. gerade von 100 aus: so trifft es in 192. Nehmet noch unverrückt die Weite zwischen 192 überzwerch; so beträgt diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt, 96 Theile.

Demnach ist $BF = 96$ F. folglich $FE = BF - EB = 96 - 80 = 16$ F.

*) Mithin wird kein verständiger Künstler an einer so hoch stehenden Statue, an einem Mosaique, Gemälde u. dergl. kleine Theile so sorgfältig ausarbeiten, als wenn sie niedriger stehet. Dieses wußte der große Athenienische Künstler Phidias besser, als sein Miteiferer Alcamenes; von welcher Geschichte FRANC. IUNIUS im Catal. Artif. beym Werke de Pictura Veter. Roter. 1694. fol. p. 153 nachzusehen ist.

Ende der ersten Seite des Proportionalzirkels.



Die

Die andere Seite des Proportionalzirkels.

IX. Von der Linea Cubica.

TABULA PRO DIVISIONE LINEAE CUBICAE.

Würfel	Seite	Würfel	Seite	Würfel	Seite	Würfel	Seite
1.	2154.	26.	6383.	51.	7990.	76.	9126.
2.	2714.	27.	6463.	52.	8041.	77.	9166.
3.	3107.	28.	6542.	53.	8093.	78.	9205.
4.	3420.	29.	6619.	54.	8143.	79.	9244.
5.	3684.	30.	6694.	55.	8193.	80.	9283.
6.	3915.	31.	6768.	56.	8243.	81.	9322.
7.	4121.	32.	6840.	57.	8291.	82.	9360.
8.	4309.	33.	6910.	58.	8340.	83.	9398.
9.	4481.	34.	6980.	59.	8387.	84.	9435.
10.	4642.	35.	7047.	60.	8434.	85.	9473.
11.	4791.	36.	7114.	61.	8481.	86.	9510.
12.	4932.	37.	7179.	62.	8527.	87.	9546.
13.	5066.	38.	7243.	63.	8573.	88.	9583.
14.	5192.	39.	7306.	64.	8618.	89.	9619.
15.	5313.	40.	7368.	65.	8662.	90.	9655.
16.	5429.	41.	7429.	66.	8707.	91.	9691.
17.	5540.	42.	7489.	67.	8750.	92.	9726.
18.	5646.	43.	7548.	68.	8794.	93.	9761.
19.	5749.	44.	7606.	69.	8836.	94.	9796.
20.	5848.	45.	7663.	70.	8879.	95.	9830.
21.	5944.	46.	7719.	71.	8921.	96.	9865.
22.	6037.	47.	7775.	72.	8963.	97.	9899.
23.	6127.	48.	7830.	73.	9004.	98.	9933.
24.	6214.	49.	7884.	74.	9045.	99.	9967.
25.	6300.	50.	7937.	75.	9086.	100.	10000.

§. 1. Erklärung und Endzweck dieser Linie.

Die Linea Cubica ist diejenige Linie, auf welcher die Seiten der vielfachen Würfel eines angenommenen angegeben sind. Da nun alle ähnliche Körper sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten: so dienet diese Linie vornehmlich, Körper nach einer gegebenen Verhältnis zu vergrößern oder zu verjüngen.

§. 2. Eintheilung dieser Linie.

Weil man sie der Linea arithm. gleich machet: so kann man ihre ganze Länge zur Seite des 100fachen Würfels annehmen, und dieser 10000 Theile geben. Um also die Seite des 1·2·3·... 99 fachen Würfels zu finden: so kann man annehmen, als ob die ganze Linie die Seite des 1000 fachen Würfels wäre, mithin nunmehr die Seite des 10·20·30·... 990 fachen Würfels gesucht würde. Hierzu dienet also in der Schulzischen Sammlung Math. Tafeln die ebenfals vom Herrn Prof. Köhl berechnete Tafel der Cubicwurzeln der natürlichen Zahlen von 1·1000, im II Th. S. 292·295. Nach dieser ist $\sqrt[3]{10}=2,154$; $\sqrt[3]{20}=2,714$ ꝛc. $\sqrt[3]{1000}=10,000$. Diese Zahlen also mit 1000 multiplicirt, sind die Zahlen der Tafel dieses Abschnitts. Will man aus den 2000 theilichten Maaßstabe die Theile der Lin. cub. auftragen: so darf man nur jede Zahl der Tafel mit $\frac{2}{10}$ multipliciren, und man erhält 431, 543 .... 2000 Theile, als die Seiten des 1·2·... 100fachen Würfels.

§. 3. Pfrüfung der Eintheilung.

Von den Zahlen 1, 8, 27, 64, 125 sind die Cubicwurzeln 1, 2, 3, 4, 5. Mithin müssen 43 Theile der Lin. arithm. oder 431 Theile des Maaßstabes Tab. I Fig. 2 in die Puncte 1, 8, 27, 64 treffen, wenn man diese Weite mit dem Handzirkel faßt, und ihn nach der Länge umschläget. Folglich müssen die Puncte von den gleich vielfachen Zahlen 1, 8, 27 gleiche Weite haben, nehmlich 2, 16, 54; 3, 24, 81; 4, 32; 5, 40; 6, 48; 7, 56; 8, 64; 9, 72; 10, 80; 11, 88; 12, 96.

§. 4. Erinnerung vom Gebrauch dieser Linie.

Der Gebrauch erstreckt sich ebenfalls, wie von der Linea geometrica im III Abschnitt §. 4 erinnert worden, nur auf geometrische Aufgaben. Zur wirklichen Ausziehung der Cubicwurzel kann man sich ihrer schwerlich im Ernst bedienen, da diesem unsichern Verfahren allemal die Rechnung vorzuziehen ist, wie sie in allen Anfangsgründen gelehrt wird. Anstatt also Scheffelts weitläufigen Unterricht zu wiederholen, ist es nützlicher, ein Paar Exempel, die er beybringt und dabey den Proportionalzirkel ganz überflüßig anwendet, analytisch zu behandeln.

1). Ein Graben ist $2\frac{2}{3}$ mal länger, als breit, und seine Tiefe verhält sich zur Breite, wie 3 : 4. Der Inhalt des Grabens sind 93312 Cubicruthen. Wie lang, breit und tief ist der Graben? Es heiße die Länge x, die Breite y, die Tiefe z; so ist $x:y=2\frac{2}{3}:1=8:3$, und $y=\frac{3}{8}x$. Und weil $y:z=4:3$; so ist $z=\frac{3}{4}y=\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}x=\frac{9}{32}x$. Demnach der Inhalt $xyz=x.\frac{3}{8}x.\frac{9}{32}x=\frac{27}{256}x^3=93312$ Cub. R. Mithin ist $x^3=\frac{256.93312}{27}=884736$ Cub. R. Folglich die Länge $x=\sqrt[3]{884736}=96$ R. die Breite $y=\frac{3}{8}\times 96=36$ R. und die Tiefe $z=\frac{9}{32}\times 96=27$ R. Probe: 27. 36. 96 = 93312.

2) Ein

2) Ein Graben ist 2mal breiter, als tief; und 2 mal länger, als breit. Sein Inhalt ist 144 Cub. R. Wie lang, breit, und tief ist er? Hier ist eben so $x:y=2:1$, also $y=\frac{1}{2}x$; und $y:z=2:1$, mithin $z=\frac{1}{2}y=\frac{1}{4}x$. Folglich der Inhalt $xyz=x.\frac{1}{2}x.\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x^3=144$ Cub. R. und $x^3=1152$ Cub. R. Demnach $x=\sqrt[3]{1152}=10,482$ R. $y=\frac{1}{2}x=5,241$ R. $z=\frac{1}{4}x=2,6205$ R. Probe: $10,482\times5,241\times2,6205=143,960212521$, der Fehler machet 39,787479 Cub. F. welcher noch kleiner seyn würde, wenn man bey x auf noch mehr Decimalstellen gegangen wäre.

§. 5. 1 Aufgabe: Zu zwey gegebenen geraden Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden.

Auflösung. Die eine Linie heiße a, die andere b, beyde mittlere x, y, so daß $a:x=x:y=y:b$ Demnach ist, wegen $a:x=x:y$, $y=\frac{x^2}{a}$. Und wegen $x:y=y:b$, ist $x:\frac{x^2}{a}=\frac{x^2}{a}:b$; folglich $bx=\frac{x^4}{a^2}$ und $a^2b=x^3$. Es sey also in einem rechtwinklichten Parallelepipedo Tab. VI Fig. 1, die Länge AB = der Breite BC = a, die Höhe AD = b: so ist der Inhalt $a\times a\times b=a^2b$. Dieses sey in einen Würfel zu verwandeln, dessen Seite x heiße. Mithin ist sein Inhalt $x^3=a^2b$, folglich $\sqrt[3]{a^2b}=x$. Es sey $a=81$, $b=24$: so ist des Pppds Grundfläche $a^2=6561$, dessen Inhalt $a^2b=157464$, folglich $\sqrt[3]{157464}=54=x$. Vermittelst des Proportionalzirkels wird die Seite des Würfels EF also gefunden. Nehmet 81 Theile gerade auf der Lin. arithm. und stellet diese Länge auf der Lin cub. überzwerch zwischen 81. Nehmet unverrückt überzwerch die Weite zwischen 24: so giebet diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt, 54 Theile. Oder stellet selbst AB = BC auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 81, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 24: so ist die ihr gleiche EF die Seite des gesuchten Würfels. Es ist nämlich, vermöge der allgemeinen Fig. 6 Tab. II.

$$AC:AE=BC:DE$$

Hier	$\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{24}=$		$a:x$
Demnach	$81:$	$24=$	$a^3:x^3$
Allein	$81:$	$24=$	$a:b$
Folglich	$a^3:$	$x^3=$	$a:b$
und also		$a^2b=$	x^3

§. 6. 1 Folgerung für die Verdoppelung des Würfels.

Wenn man $b=2a$ setzet: so wird aus der Gleichung $a^2b=x^3$, diese $a^2\times2a=2a^3=x^3$. Und weil daher $a:x=x:y=y:2a$, mithin, wegen $a<2a$, auch $x<y$: so ist die Seite des doppelten Würfels die kleinere von zwey mittleren Proportionallinien zwischen der einfachen und doppelten

doppelten Seite des gegebenen Würfels. Es sey Tab. VI Fig. 2, GH. die Seite eines Würfels, welcher verdoppelt werden soll. Versuchet also, zwischen welcher Zahl sich diese Seite auf der Lin. cub. überzwerch stellen lasse. Diese sey 25. Nehmet unverrückt auch überzwerch die Weite zwischen derjenigen Zahl, welche das zweyfache der vorigen ist, also hier zwischen 50: so ist die ihr gleiche IK die Seite des doppelten Würfels. Denn es ist $\sqrt[3]{25}:\sqrt[3]{50}=$ GH:IK, mithin $25:50=1:2=$ GHc:IKc$=a^3:x^3$, folglich $2a^3=x^3$ und 2GHc=IKc. (Hier mag z. E. IKc einen Würfel bedeuten, dessen Seite IK ist, so wie IKq ein Viereck, dessen Seite IK ist). Diese Verdoppelung des Würfels ist das berühmte Problema Deliacum, dessen Auflösung, wie der Pythagoräer HIPPOCRATES CHIUS zuerst gelehrt hat, welcher nach FABRICIO Bibl. Gr. Vol. I p. 795 von dem Arzt HIPPOCRATES COUS unterschieden ist, auf der Erfindung zweyer mittleren Proportionallinien beruhet. S. Montucla Hist. des Math. T. I p. 186 suiv. I. MOLTHERI Problema Deliacum Francof. 1619, 4 und diejenigen, welche von den Locis geometricis in der Analysi finitorum handeln. Die Auflösung dieser Aufgabe vermittelst des Prop. Zirkels ist eigentlich eine arithmetische, weil die Eintheilung der Lin. cub. auf arithmetischen Gründen beruhet; die geometrische aber läßt sich nicht aus den Lehren der niedrigen Geometrie herleiten, sondern setzt die Höhere voraus.

§. 7. 2 Folgerung für jeden prismatischen und pyramidalischen Körper.

Die Grundfläche eines gegebenen prismatischen Körpers sey eine Figur, welche man wolle, und er selbst ein gerader, senkrechter, oder schiefer: so kann der Inhalt einer jeden Figur für den Inhalt eines Vierecks angenommen werden, dessen Seite a sey. Da nun für die Höhe b der Inhalt des Prisma a^2b ist: so läßt sich nach §. 5 überhaupt jeder prismatische Körper in einen Würfel verwandeln. Und wenn man eben so die Grundfläche eines pyramidalischen Körpers in ein Viereck verwandelt, dessen Seite a ist: so ist sein Inhalt $a^2\times\frac{1}{3}b$; folglich darf man nur zwischen a und $\frac{1}{3}b$ zwey mittlere Proportionallinien suchen, um auch einen solchen Körper in einen Würfel zu verwandeln.

§. 8. 2 Aufgabe: Die Verhältnis ähnlicher Körper zu einander zu finden.

Auflösung. Es mögen die Durchmesser zweyer Kugeln LM, NO Tab. VI Fig. 3 gegeben seyn. Stellet den einen Durchmesser LM auf der Lin. cub. überzwerch zwischen eine beliebige Zahl z. E. 100, und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl sich der andere Durchmesser NO überzwerch stellen lasse. Die Zahl sey 25: so verhalten sich beyde Kugeln, wie 100: 25=4:1.

Eben so verfähret man, wenn z. E. Tab. VI Fig. 4 sich drey Durchmesser PQ, RS, TV wie 3, 4, 5 verhalten. Stellet PQ überzwerch auf der Lin. cub. zwischen eine beliebige Zahl, z. E. 9, und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahlen sich RS, TV überzwerch stellen lassen. Trifft RS zwischen $21\frac{1}{3}$, TV zwischen $41\frac{2}{3}$: so verhalten sich diese drey Kugeln wie

wie $9:21\frac{1}{3}:41\frac{2}{3}=27:64:125$ oder ziemlich genau, wie $1:2,37:4,63$. Das ganze Verfahren beruhet darauf, daß, vermöge §. 1, auch die Kugeln sich wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten.

Ist z. E. Fig. 3, NO=1 F. LM=1,587 F. so ist NOc : LMc $=1:\overline{1,587}^{3}$ $=1:3,996969003$ beynahe $=1:4$.

§. 9. Anmerkung.

Man kann daher auf ähnliche Weise, wie im III Abschnitt §. 6, hier auch sagen, daß eine Zahl a gerade auf der Lin. arithm. nehmen, und sie auf der Lin. cub. zwischen $\sqrt[3]{a}$ überzwerch stellen, so viel sey, als a cubiren; aber die Weite zwischen $\sqrt[3]{a}$ nehmen, und auf die Lin. arithm. gerade stellen, so viel sey, als aus a die Cubicwurzel ausziehen.

§. 10. 3 Aufgabe: Die Verhältnis unähnlicher, aber ordentlicher Körper zu einander zu finden.

Auflösung. Es sey Tab. VI Fig. 5 ein Würfel gegeben, dessen Seite AB, und eine Kugel, deren Durchmesser CD sey. Verwandelt den Würfel in eine Kugel, deren Durchmesser EF sey, vermittelst der Lin. Red. Corp. regul. VI Abschnitt §. 8 und suchet die Verhältnis beyder Kugeln nach §. 8. Oder verwandelt die Kugel in einen Würfel und verfahret eben so.

§. 11. Anmerkung.

Sind beyde Körper nicht ordentliche: so gehören sie entweder zu den prismatischen und pyramidalischen, oder man muß ihre Theile auf solche zu reduciren wissen. Sind Körper von noch so unordentlicher Gestalt: so läßt sich am besten die Verhältnis ihrer Größe, wenn sie aus einerley und durchgehends gleich dichten Materie bestehen, aus der ihr gleichen Verhältnis des Gewichtes finden, z. E. zweyer Statuen aus einerley Art Marmors; mithin einer allein, wenn die specifische Schwere der Materie bekannt ist, wie die Hydrostatik lehret. Den Inhalt kleiner Körper kann man am sichersten, wenn es angehet, durchs Abwägen im Wasser finden. Denn die Vorschrift in Wolffs Ausz. der Geom. §. 217. 218, kann, so theoretisch sie auch richtig ist, in der Ausübung selbst gar nichts genaues geben. Hat man also den Inhalt zweyer solcher Körper gefunden: so muß er als der Inhalt eines Würfels betrachtet und dessen Seite durch die Ausziehung gesucht werden; da denn vermittelst der Lin. cub. die Verhältnis beyder sich ergiebet.

§. 12. 4 Aufgabe: Aehnliche Körper zu addiren, oder einen Körper zu finden, welcher mehreren gegebenen ähnlichen Körpern zusammen genommen gleich sey.

Auflösung. Es mögen Tab. VI Fig. 6 die Seiten dreyer Würfel GH, IK, LM gegeben seyn, die sich wie 3, 4, 5 verhalten. Folglich ist GHc : IKc : LMc $=27:64:125$. Die

Summe dieser Zahlen ist 27+64+125=216. Da nun die Linea cubica nur bis auf 100 sich erstreckt: so nehmet ein vieltheilichtes, welches sie angiebt, z. E. $\frac{216}{4}$=54 und den gleichvieltheilichten Inhalt des einen gegebenen Würfels z. E. von IK c, $\frac{64}{4}$=16. Stellet IK auf die Lin. cub. überzwerch zwischen 16 und unverrückt nehmet die Weite zwischen 54: so ist die ihr gleiche NO die gesuchte Seite von 6 solchen Theilen, dergleichen GH 3, IK 4, und LM 5 hat. Denn es ist

$$\begin{array}{l} IKc : GHc = 64 : 27 \\ \quad\; IKc = \quad : 64 \\ \quad\; LMc = \quad : 125 \\ \hline IKc : GHc + IKc + LMc = 64 : 27 + 64 + 125 \\ IKc : \quad NOc \quad = 64 : 256 \text{ vermöge des Verfahrens} \\ \hline GHc + IKc + LMc : NOc = 27 + 64 + 125 : 256 \\ \qquad = 256 : 256 \end{array}$$

Folglich GHc+IKc+LMc=NOc.

Wenn zwey Kugeln gegeben sind, deren einer Inhalt $12^{\prime\prime c}\frac{3}{4}$, der andern $10^{\prime\prime c}\frac{1}{2}$ ist, und man den Durchmesser einer Kugel suchet, die beyden gleich sey: so ist ihre Verhältnis $12\frac{3}{4} : 10\frac{1}{2} = \frac{51}{4} : \frac{21}{2} = \frac{51}{4} : \frac{42}{4}$ = 51:42, auch mit 3 dividiret, 17:14. Es ist aber 51+42=93, auch 17+14=31. Nehmet auf der Lin. arithm. $12\frac{3}{4}$, stellet diese Länge auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 51 oder 17 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 93 oder 31 so ist diese der gesuchte Durchmesser.

Durch die Rechnung. Es sey Tab. VI Fig. 7 der einen Kugel Durchmesser PQ=218″, der andern RS=233″: so ist $\overline{218}^3$ = 10360232 Cub. Z. $\overline{233}^3$ = 12649337 Cub. Z. Die Summe beyder Cubiczahlen 23009569, die Cubicwurzel 284″ als die Länge des gesuchten Durchmessers TV.

§. 13. Zusatz.

Wenn unähnliche ordentliche Körper zu addiren sind, d. i. ein ordentlicher Körper gesucht wird, der vielen unähnlichen ordentlichen Körpern zusammengenommen gleich sey: so setze man, daß Tab. VI Fig. 8 die Seite eines Würfels gefunden werden solle, der einem Würfel, dessen Seite AB ist, und einer Kugel, deren Durchmesser CD ist, zusammengenommen gleich sey. Verwandelt die Kugel in einen Würfel, dessen Seite GH ist, vermittelst der Lin. Red. Corp. regul. VI Abschnitt §. 8. Suchet nach §. 12 die Seite eines Würfels, der beyden Würfeln, deren Seiten AB, GH sind, gleich sey. Diese Seite sey EF: so ist EFc=ABc+GHc=dem Würfel und der Kugel.

Die Rechnung ist der §. 12 ähnlich. Es sey AB=101″, GH=110″: so sind die Cubiczahlen 1030301 und 1331000. Diese addirt geben 2361301, die Cubicwurzel 132″,7=EF.

§. 14. 5 Aufgabe: Aehnliche Körper von einander abzuziehen, d. h. einen Körper zu finden, welcher dem Unterschiede zwischen zwey Körpern gleich und ihnen ähnlich sey.

Auflösung. Es soll z. E. Tab. VI Fig. 9 der Unterschied zwischen zwey Würfeln, deren Seiten IK, LM sind, gefunden werden, und es sey LMc:IKc=27:12. Weil nun 27−12=15: so stellet auf die Lin. cub. die Seite LM überzwerch zwischen 27 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 15; so ist die ihr gleiche NO die Seite des gesuchten Würfels. Denn es ist, wie im Beweise §. 12, wegen 15+12=27, NOc+IKc=LMc.

Durch die Rechnung. Es sey die Seite des einen Würfels 133″, des andern 101″, so sind beyder Cubiczahlen 2352637, 1030301, ihr Unterschied 1322336, und hieraus die Cubicwurzel beynahe 110 Z. die Länge der gesuchten Seite.

§. 15. 6 Aufgabe: Körper zu multipliciren d. h. einen Körper zu finden, der das vielfache eines gegebenen und ihm ähnlich sey.

Auflösung. Man soll z. E. Tab. VI Fig. 10 das Parallelepipedum AD viermal größer machen. Stellet dessen Länge AB auf der Lin. cub. überzwerch zwischen eine Zahl, deren vierfaches nicht über 100 gehet, z. E. zwischen 10. Nehmet unverrückt und überzwerch die Weite zwischen 4×10=40: so ist die ihr gleiche AE die Länge des 4fachen Pppdi. Stellet ferner die Breite BC überzwerch zwischen 10 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 40: so ist die ihr gleiche EF die Breite des 4fachen Pppdi. Stellet endlich die Höhe CD überzwerch zwischen 10 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 40: so ist die ihr gleiche FG die Höhe des 4fachen Pppedi.

Wenn der gegebene Körper ein ordentlicher ist: so darf nur die Seite des vielfachen aus der Seite des einfachen gesucht werden, weil diese nach dem VI. Abschnitt §. 3. alles übrige giebet.

Durch die Rechnung. Es sey AB=16″, BC=10″, CD=8″. Mithin

$$AE=\sqrt[3]{4.16}=\sqrt[3]{16384}=25{,}4$$
$$EF=\sqrt[3]{4.10}=\sqrt[3]{4000}=15{,}9$$
$$FG=\sqrt[3]{4.8}=\sqrt[3]{2048}=12{,}7$$

§. 16. 7 Aufgabe: Zu einem gegebenen Körper einen ähnlichen zu finden, welcher von ihm ein gegebenes Vieltheilichtes sey, oder einen gegebenen Körper zu dividiren, nach einer gegebenen Verhältnis zu verkleinern, oder zu verjüngen.

Auflösung. Man soll z. E. Tab. VI Fig. 11 eine Kugel, deren Halbmesser GH ist, auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ verjüngen. Stellet auf der Lin. cub. den Halbmesser GH überzwerch zwischen

schen eine Zahl, deren gegebene Theile sich in ganzen Zahlen angeben lassen, hier also zwischen 4, oder deren vielfaches, also zwischen 8, 12, 16 .... 100. Nehmet unverrückt und überzwerch die Weite zwischen 3 (oder deren gleich vielfachen 6, 9, 12 .. 75) für den Halbmesser IH; ferner unverrückt die Weite zwischen 2 (oder deren gleich vielfachen 4, 6, 8 .... 50) für den Halbmesser KH; endlich die Weite zwischen 1 (oder deren gleich vielfachen 2, 3, 4 ... 25) für den Halbmesser L H. Denn die Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser, mithin auch wie die Würfel ihrer Halbmesser.

Durch die Rechnung. Es sey GH = 12''. Mithin

GHc = 1728''c

$\frac{1}{4}$GHc = LHc = 432	Dieser Zahlen	7,''55 = LH
$\frac{1}{2}$GHc = HKc = 864	Cubic-	9,52 = HK
$\frac{3}{4}$GHc = I Hc = 1296	wurzeln	10,90 = I H

Wäre der gegebene Körper z. E. Tab. VI Fig. 10 das Parallelepipedum A G, welches auf $\frac{1}{4}$ verjüngt werden soll: so muß man, vergl, mit §. 15, umgekehrt die Seiten A E, E F, F G zwischen 40 überzwerch stellen und unverrückt auch überzwerch die Weiten zwischen 10 nehmen, welchen A B, B C, C D gleich sind.

§. 17. Uebersicht der Lehre von Berechnung des Inhalts prismatischer Körper.

I. Wenn Tab. VI Fig. 12, mit einer geraden Linie A B, als einer Längeneinheit, sich alle drey Seiten eines rechtwinklichten Parallelepipedi A F, nämlich A C, A D, A E ausmessen lassen, und sich A B : A C = 1 : a, A B : A D = 1 : b, A B : A E = 1 : c verhält: so ist, vermöge des Zusatzes zum 40 S. des XI B. Euclidis der Bärmannischen Ausgabe, A F : A B c = (C D : A B q) + (A E : A B). Allein es ist, wie im III Abschn. §. 12, C D : A B q = (A C : A B) + (A D : A B). Folglich A F : A B c = (A C : A B) + (A D : A B) + (A E : A B) = (a : 1) + (b : 1) + (c : 1) d. h. A F : A B c = a × b × c : 1 × 1 × 1 = a b c : 1, welche 1 daher eine Cubiczahl ist. Folglich ist A F = a b c × A B c. Man erhält also den Inhalt eines rechtwinklichten Pppdi, d. i. die Menge der Würfel, deren jeder das körperliche Maaß ist, welche ihn ausfüllen, wenn man die Zahlen, welche angeben, wie oft die Seite des körperlichen Maaßes in seiner Länge, Breite und Höhe enthalten ist, mit einander multipliciret. Das Product aus a in b giebet den Inhalt der Grundfläche, oder die Menge von A B q an, aus welchen sie bestehet; dieses Product a b aber mit c multiplicirt, die Menge von A B c, aus welchen der Körper bestehet. Man kann daher sagen, der Inhalt eines rechtwinklichten Pppdi komme heraus, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multipliciret.

In der Figur sey A B 1 Zoll. Da nun a = 5 b = 4: so ist der Inhalt der Grundfläche a b × A B q = 20 Quadr. Z. und wegen c = 9, der Inhalt des Pppdi a b c × A B c = 20 . 9 = 180 Cubic Zollen.

II. Im Würfel Tab. VI Fig. 13 ist A C = A D = A E. Demnach A F : A B c = (A C : A B) + (A D : A B) + (A E : A B) = (a : 1) + (a : 1) + (a : 1) = a a a : 1 × 1 × 1 = a^3 : 1 und also A F =

A C c =

$AC = a^3 \times ABc$. Mithin erhält man den Inhalt eines Würfels, oder die Menge der Würfel, deren jeder das körperliche Maaß ist, welche ihn ausfüllen, wenn man die Cubiczahl (die daher ihren Namen hat) derjenigen Zahl suchet, welche angiebet, wie oft die Seite des körperlichen Maaßes in der Seite des gegebenen Würfels enthalten ist. In der Figur ist für AB 1 Zoll, $a=5$, demnach die Länge der Seite $a \times AB = 5$ Z. die Grundfläche $a^2 \times ABq = 25$ Qudr. Z. und der Inhalt des Würfels $a^3 \times ABc = 25 \times 5 = 125 = 5.\ 5.\ 5$ Cub. Zollen.

III. Alle Parallelepipeda, gerade oder schiefe, die einerley oder gleiche Grundflächen haben, und zwischen einerley parallelen Ebenen liegen, sind gleiches Inhalts, Euclid. XI B. 29.31 S. Folglich ist jedes Pppdum einem rechtwinklichten Pppdo gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche hat und zwischen einerley parallelen Ebenen lieget, oder, wenn man will, stehet. Ist Tab. VI Fig. 14, die Grundfläche $AB = CD$, und die Ebene GH der Ebene EF parallel: so ist auch das Pppdum $AI = CK$. Es ist aber die Höhe LM des Pppdi CK der Höhe BI des rechtwinklichten Pppdi AI gleich, und, wie angenommen, $AB = CD$. Folglich ist $CK = AI = AB \times BI = CD \times LM$, nämlich Grundfläche und Höhe arithmetisch genommen. Folglich heißt den Inhalt eines jeden Pppdi finden, nichts anders, als den Inhalt eines rechtwinklichten Pppdi finden, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

IV. Jedes Pppdum wird durch die Diagonalfläche in zwey gleiche und ähnliche dreyeckichte Prismata getheilt, Euclid. XI B. 28 S. Es ist also jedes dreyeckichte Prisma die Hälfte eines rechtwinklichten Pppdi, mit welchem das doppelte dreyeckichte Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat. Folglich heißt den Inhalt eines dreyeckichten Prisma finden, nichts anders, als den halben Inhalt eines rechtwinklichten Pppdi finden, das mit dem doppelten Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat; und also ist auch dieser ein Product aus der Grundfläche in die Höhe.

V. Jedes vieleckichte gerade oder schiefe Prisma läßt sich durch Diagonalflächen in so viel dreyeckichte Prismata weniger zwey eintheilen, als die Grundfläche Seiten hat. Da nun die Grundflächen dieser dreyeckichten Prismatum zusammengenommen die Grundfläche des vieleckichten sind, und alle gleiche Höhen haben: so heißt den Inhalt eines vieleckichten Prismatis finden, nichts anders, als den halben Inhalt von so viel rechtwinklichten Pppdis finden, die mit so viel doppelten dreyeckichten Prismatibus gleiche Grundflächen und Höhen haben, als aus so viel einfachen dreyeckichten Prismatibus das vieleckichte bestehet. Folglich ist auch der Inhalt eines jeden vieleckichten Prismatis einem Product aus der Grundfläche in die Höhe gleich.

VI. Da jeder Cylinder ein Prisma ist, das zu seiner Grundfläche ein ordentliches Vieleck von unendlich vielen Seiten, oder den Kreis hat; so erhält man auch den Inhalt eines Cylinders, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirets.

* Hier ist, wegen folgenden Rechnungen, der allgemeine Ausdruck für den Inhalt eines Cylinders zu merken, dessen Durchmesser d und dessen Höhe a ist. Es sey die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis überhaupt $1 : \varpi$ (nach dem Ludolph von Ceulen $100 : 314 = 1 : 3{,}14$,

daß also nach ihm $\pi = 3{,}14$ ist): so ist der Umkreis der Grundfläche des Cylinders $1 : \pi = d : \pi d$, die Grundfläche selbst $\pi d \times \frac{d}{4} = \frac{\pi d^2}{4}$ und der Inhalt des Cylinders $\frac{\pi a d^2}{4}$.

Mithin beruhet die Berechnung des Inhalts aller prismatischen Körper auf der Berechnung des Inhalts eines rechtwinklichten Pppdi, nämlich auf der nach N. I. erklärten Multiplication der Grundfläche mit der Höhe.

§. 18. Uebersicht der Berechnung des Inhalts pyramidalischer Körper.

I. Jedes dreyeckichte Prisma ABCDEF Tab. VI Fig. 15 läßt sich durch zwey Diagonalflächen ACD, ECD in drey gleiche dreyseitige Pyramiden ABCD, ADEC, EFDC theilen, Euclid. XII B. 7 S.

II. Es ist also jede dreyseitige Pyramide der dritte Theil eines dreyeckichten Prismatis, das mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat; folglich der dritte Theil eines halben Pppdi, dessen Grundfläche die doppelte Grundfläche der dreyseitigen Pyramide ist und mit ihr gleiche Höhe hat; mithin der dritte Theil eines halben rechtwinklichten Pppdi, dessen Grundfläche der doppelten Grundfläche der dreyseitigen Pyramide gleich ist und mit ihr gleiche Höhe hat. Daher heißt den Inhalt einer dreyseitigen Pyramide finden, nichts anders, als den Inhalt des dritten Theils eines halben rechtwinklichten Pppdi finden, welches ganz einem doppelten dreyeckichten Prisma gleich ist, von deren jedem die dreyseitige Pyramide der dritte Theil ist. Man erhält also den Inhalt einer dreyseitigen Pyramide, wenn man den dritten Theil des Products aus ihrer Grundfläche in die Höhe oder des ihr zugehörigen Prismatis suchet.

III. Weil jede vielseitige Pyramide sich durch Dreyecke, die in ihrer Spitze zusammentreffen, in so viel dreyseitige Pyramiden weniger zwey eintheilen läßt, als die Grundfläche Seiten hat: so erhält man auch ihren Inhalt, wenn man den dritten Theil des Products aus ihrer Grundfläche in die Höhe oder des ihr zugehörigen Prismatis suchet.

IV. Folglich ist der Kegel der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

* Die Bedeutungen der Buchstaben §. VI. VI. * vorausgesetzt, ist der Inhalt des Kegels $\frac{\pi a d^2}{12}$.

Mithin beruhet auch auf der Erfindung des Inhalts eines rechtwinklichten Pppdi die Berechnung des Inhalts eines jeden pyramidalischen Körpers, nämlich durch die Multiplication von $\frac{1}{3}$ Grundfläche mit der Höhe, oder $\frac{1}{3}$ Höhe mit der Grundfläche.

§. 19. Von Berechnung des Inhalts einer abgekürzten Pyramide.

Man setze beyde parallele Grundflächen der ganzen und der kleinen Pyramide, welche die Ergänzung der abgekürzten ist, Tab. VI Fig. 16, CHE=B, FIG=b, zwey ähnlich liegende Seiten in beyden CH=L, FI=l, die Höhe der ganzen Pyramide MN=x, der abgekürzten ON=a: so ist die Höhe der kleinen MO=x−a. Da nun MN:MO=MC:MF =CH:

$=CH:FI$, also $x:x-a=L:l$; so ist $lx=Lx-La$, folglich $x=\frac{La}{L-l}$ und $x-a=\frac{la}{L-l}$. Es ist aber der Inhalt der ganzen Pyramide $\frac{1}{3}Bx=\frac{1}{3}B\times\frac{La}{L-a}$, der kleinen $\frac{1}{3}b\times\frac{la}{L-l}$: folglich der Inhalt der abgekürzten Pyramide $\frac{1}{3}B\times\frac{La}{L-l}-\frac{1}{3}b\times\frac{la}{L-l}=\frac{a}{3(L-l)}\times(BL-bl)$. Es ist aber $B:b=L^2:l^2$, und also $b=\frac{Bl^2}{L^2}$. Dieses substituirt giebet zum Inhalt der abgekürzten Pyramide $\frac{a}{3(L-l)}\times\left(BL-\frac{Bl^2}{L^2}\right)=\frac{aB(L^3-l^2)}{3(L^3-L^2l)}$ und wenn man L^3-l^2 mit L^3-L^2l dividiret, $=\frac{aB}{3}\left(1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right)=\frac{aB}{3L^2}(L^2+Ll+l^2)$. Sind beyde Grundflächen Vierecke: so ist $B=L^2$, $b=l^2$. Dieses giebet zum Inhalt einer solchen abgekürzten Pyramide $\frac{aB}{3B}(B+\sqrt{Bb}+b)=\frac{1}{3}a\,(B+b+\sqrt{Bb})$ wie Scheffelt die Regel ausdrückt. Er setzt $L=4'$ $l=2'$, $a=10'$. Folglich $B=L^2=16^{'q}$, $b=l^2=4^{'q}$, $Bb=L^2l^2=64$, mithin $\sqrt{Bb}=Ll=8$. $B+b=20$. Folglich der Inhalt $\frac{10}{3}(20+8)=\frac{280}{3}=93^{'c}\frac{1}{3}$.

§. 20. Folgerung für die Berechnung des Inhalts eines abgekürzten Kegels.

Beym abgekürzten Kegel Tab. VI Fig. 17 sind die Durchmesser der Grundflächen CH, FI zwey solche ähnlich liegende Seiten, wie L, l, welche itzt D, d heißen mögen, B aber ist die Grundfläche des ganzen Kegels, folglich ihr Inhalt $\frac{\pi D^2}{4}$ §. 17. VI. *. Demnach der Inhalt des abgekürzten Kegels $\frac{a}{3D^2}\times\frac{\pi D^2}{4}(D^2+Dd+d^2)=\frac{1}{12}a\pi\,(D^2+Dd+d^2)$. Es sey $D=14'$, $d=12'$, $a=9'$: so ist $D^2=144$, $Dd=168$, $d^2=144$, die Summe 508, also $\frac{1}{12}\times 9\times 3{,}14\times 508=1196{,}34$ Cub. F.

* Scheffelt hat hier ohne Noth eine weitläufige Vorschrift gegeben, durch die man aber das vorige erhält. Er suchet

1) den Inhalt beyder Grundflächen. Demnach $B=\frac{\pi D^2}{4}$, $b=\frac{\pi d^2}{4}$

2) ihre halbe Summe, als den Inhalt der äquirten Grundfläche. Mithin $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi D^2}{4}+\frac{\pi d^2}{4}\right)=\frac{1}{8}\pi(D^2+d^2)$.

3) Den Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser der äquirte Durchmesser beyder Grundflächen ist. Der äquirte Durchmesser ist $\frac{D+d}{2}$, der Inhalt des ihm zugehörigen Kreises $\frac{1}{4}\pi\times\frac{(D+d)^2}{4}$.

4) Den

4) Den Unterschied zwischen diesem Kreise und der äquirten Grundfläche. Also $\frac{1}{8}\pi(D^2+d^2) - \frac{1}{4}\pi \times \frac{(D+d)^2}{4} = \frac{1}{16}\pi\ (D^2-2Dd+d^2)$.

5) ein Drittel dieses Unterschiedes $\frac{1}{48}\pi(D^2-2Dd+d^2)$.

6) Die Summe von diesem Drittel und dem Kreise des äquirten Durchmessers. Mithin $\frac{1}{48}\pi(D^2-2Dd+d^2) + \frac{1}{16}\pi(D^2+2Dd+d^2) = \frac{1}{48}\pi(D^2-2Dd+d^2) + \frac{1}{48}\pi(3D^2+6Dd+3d^2) = \frac{1}{48}\pi(4D^2+4Dd+4d^2) = \frac{1}{12}\pi(D^2+Dd+d^2)$.

7) Endlich das Product aus der Höhe des abgekürzten Kegels a in diese Summe. Dieses ist $\frac{1}{12}a\pi(D^2+Dd+d^2)$ wie vorher.

Dergleichen Rechnungen in vielen practischen geometrischen Büchern haben eben so ein künstliches Ansehen, wie die meisten berufenen Vortheile in den Rechenbüchern. Nach dem Scheffelt ist $1:\pi=7:22$, demnach der Inhalt des abgekürzten Kegels $\frac{22}{7} \times \frac{1}{12} \times 9 \times 508 = 1197\frac{3}{7} =$ 1197,42 Cub. F. also um 1,08 Cub. F. zu groß.

§. 21. Berechnung der Abmessungen einer Kugel.

Die Kugel ist, wie Archimedes erfunden hat, $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Dieser Durchmesser sey d: so ist der Inhalt eines solchen Cylinders $\frac{\pi d^3}{4}$, und also der Kugel $\frac{\pi d^3}{6}$. Es ist aber auch die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kugelfläche und die Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Folglich ist die Kugelfläche $\frac{\pi d^3}{6} : \frac{1}{3} \times \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{6} \times \frac{6}{d} = \pi d^2 = \pi d \times d$ oder einem Product aus dem Durchmesser in den größten Umkreis. Es sey $d=12''$, so ist der Inhalt der Kugel $\frac{1}{6} \times 3{,}14 \times 1728 = 904{,}32$ Cub. Z. Beym Scheffelt ist $\pi = \frac{22}{7}$, folglich der Inhalt der Kugel $288 \times \frac{22}{7} = 905\frac{1}{7}$ Cub. Z. also zu groß.

§. 22. Anmerkung über eine besondere Rechnung.

Scheffelt bringet bey, wie der Inhalt eines Würfels zu berechnen sey, dessen Seite $3+\sqrt{2}$ Fuß ist. Eine solche Aufgabe kann in der Praxis gar nicht vorkommen, weil man die Länge jeder Linie nur in Ruthen, Füßen, Zollen rc. oder deren Theilen, so genau angiebet, als es nöthig ist, mithin allemal in rationalen ganzen oder gebrochnen Zahlen. Sie dienet daher nur zur Uebung, und bedeutet so viel. Wenn Tab. VI Fig. 18, AB die Einheit ist, so ist AC=3, und von ABq ist die Diagonale $DB=\sqrt{2}$. Demnach, wenn man AC um CE=DB verlängert: so ist $AE=AC+CE=3+\sqrt{2}$. Folglich, $a=3$, und $\sqrt{b}=\sqrt{2}$ gesetzt, der Inhalt von $AEc=(a+\sqrt{b})^3=a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b\sqrt{b}$. Also $(3+\sqrt{2})^3=27+27\sqrt{2}+18+2\sqrt{2}=45+29\sqrt{2}=45+\sqrt{2}\sqrt{841}=45+\sqrt{1682}$. Die Einheit sey 1 F. so ist der Inhalt $(45+\sqrt{1682})$ Cub. Fuß, mithin, weil ziemlich genau $\sqrt{1682}=41$, 86 Cub. Fuß. Eben dieses erhält man ohne solche hier unnütze Künsteleyen mit Irrationalzahlen aus $(3+\sqrt{2})^3=(4{,}414)^3=85{,}941272997$ aus Buchners Tafeln,

Tafeln, also beynahe 86. Mit dem Proportionalzirkel $\sqrt{2}$ so genau bestimmen zu wollen, daß man nicht um $\frac{1}{100}$ fehle, heißt von diesem Werkzeuge des Guten zu viel fordern.

§. 23. 8 Aufgabe: Zu zwey ähnlichen Körpern den dritten proportionirten ähnlichen Körper zu finden.

Auflösung. Die Seiten zweyer Würfel, die sich wie 27:36 verhalten, mögen Tab. VI Fig. 19, FG, HI seyn. Stellet HI auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 27, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 36: so ist die ihr gleiche KL die Seite des gesuchten größern Würfels. Denn es ist

$$FGc : HIc = 27 : 36$$
$$HIc : KLc = 27 : 36$$

Folglich $FGc : HIc = HIc : KLc$.

Durch die Rechnung. Es ist $\underset{\underset{1}{3}}{27} : \underset{4}{36} = \underset{12}{36} : 48$, die Seite selbst $\sqrt[3]{48} = 3,64$.

Soll die Seite des kleinern Würfels gesucht werden: so stellet FG überzwerch zwischen 36, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 27: so ist die ihr gleiche MN die Seite des gesuchten kleinern Würfels.

Durch die Rechnung. Es ist $\underset{4}{36} : \underset{3}{27} = \underset{3}{27} :$) 81 f 20,25, die Seite selbst $\sqrt[3]{20,25} = 2,72$.

Oder, weil von vier proportionirten Cubiczahlen auch ihre Cubicwurzeln proportionirt sind, so ist hier $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{36} : \sqrt[3]{x^3}$ d. i. $3 : 3,3 = 3,3 : KL$, folglich $KL = 3,63$. Und umgekehrt $\sqrt[3]{36} : \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{y^3}$ d. i. $3,3 : 3 = 3 : MN$, folglich $MN = 2,7$.

§. 24. 9 Aufgabe: Zu drey gegebenen ähnlichen Körpern den vierten proportionirten ähnlichen Körper zu finden.

Auflösung. Es mögen die Durchmesser dreyer Kugeln Tab. VII Fig. 20, OP, QR, ST gegeben seyn, und die Kugeln sich wie 6, 10, 15 verhalten. Stellet den Durchmesser ST überzwerch auf der Lin. cub. zwischen 6 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 10: so ist die ihr gleiche VX der Durchmesser der gesuchten Kugel, wie aus §. 23 klar ist.

Durch die Rechnung. Es ist $\underset{\underset{1}{2}}{6} : \underset{5}{10} = \underset{5}{15} : 25$, die Seite selbst $\sqrt[3]{25} = 2,92$.

Oder, wie §. 23, $\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{x^3}$ d. i. $1,81 : 2,15 = 2,46 : 2,92$.

§. 25. 10 Aufgabe: Einen gegebenen Cylinder in einen andern zu verwandeln, der eine andere gegebene Höhe habe.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 21 des gegebenen Cylinders Höhe $AC = a$ Durchmesser $AB = d$, so ist sein Inhalt $\frac{\pi a d^2}{4}$. Es sey des gesuchten gegebene Höhe $DE = \alpha$, sein Durchmesser x: so ist sein Inhalt $\frac{\pi \alpha x^2}{4} = \frac{\pi a d^2}{4}$. Folglich $\alpha x^2 = a d^2$ und also $x = \sqrt{\frac{a d^2}{\alpha}} = d \sqrt{\frac{a}{\alpha}}$.

Suchet daher zwischen den Höhen AC, DE die mittlere Proportionallinie GH, II Abschnitt §. 26. III Abschnitt §. 6, und zu GH, AC, AB die vierte Proportionallinie DF, II Abschnitt §. 24, welche der gesuchte Durchmesser ist. Denn so ist

$$AC : GH = GH : DE$$
$$a : GH = GH : \alpha$$
$$GH = \sqrt{a\alpha}$$
$$GH : AC = AB : DF$$
$$\sqrt{a\alpha} : a = d : DF$$
$$DF = \frac{ad}{\sqrt{a\alpha}} = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{\alpha}} = x.$$

Es sey $a = 36$, $d = 12$, $\alpha = 16$: so ist $x = 12 \sqrt{\frac{36}{16}} = 12 \times \frac{6}{4} = 18$.

§. 26. 11 Aufgabe: Einen gegebenen Cylinder, dessen Höhe und Durchmesser ungleich sind, in einen andern zu verwandeln, dessen Höhe dem Durchmesser gleich sey.

Auflösung. Es sey noch der Cylinder BC Tab. VII. Fig. 21 gegeben, dessen Höhe $AC = a$, Durchmesser $AB = d$, so ist sein Inhalt $\frac{\pi a d^2}{4}$. Des gesuchten Höhe und Durchmesser sey x: so ist sein Inhalt $\frac{\pi x^3}{4} = \frac{\pi a d^2}{4}$. Folglich $x^3 = a d^2$ und $\sqrt[3]{a d^2} = x$. Suchet also zwischen der Höhe AC und dem Durchmesser AB des gegebenen Cylinders zwey mittlere Proportionallinien §. 5. Weil nämlich, wie §. 25, $AC = a = 36$, und $AB = d = 12$, so stellet AB auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 12 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 36: so ist die ihr gleiche gh Tab. VII. Fig. 22, die Höhe und der Durchmesser des gesuchten Cylinders. Denn was §. 5, a^2, b war, ist hier d^2, a.

Wegen $a = 36$, $d = 12$, ist $ad^2 = 36 \times 144 = 5184$ und $\sqrt[3]{5184} = 17,3 = gh$.

§. 27. 12 Aufgabe: Zu zwey gegebenen Körpern einen dritten zu finden, welcher mit dem einem gleiches Inhalts, dem andern aber zugleich ähnlich sey.

Auflösung. Es soll z. E. Tab. VII. Fig. 23 der Cylinder HI, dessen Höhe GI = a = 25 Z. Durchmesser GH = d = 14 Z. in einen Cylinder verwandelt werden, der einem andern Cylinder LM ähnlich sey, dessen Höhe KM = m = 15 Z. Durchmesser KL = n = 28" sey. Demnach ist der Inhalt des Cyl. HI = $\frac{\pi a d^2}{4} = 3,14 \times \frac{25 \times 196}{4} = 3846,5$ Cub. Z. und des Cyl. LM = $\frac{\pi m n^2}{4} = 3,14 \times \frac{15 \times 784}{4} = 9231,6$ Cub. Z. Stellet daher den Durchmesser KL auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 92,3; und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 38,4: so ist die ihr gleiche NO der Durchmesser des gesuchten Cylinders. Eben so stellet die Höhe KM überzwerch zwischen 92,3; und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 38,4: so ist die ihr gleiche NP die Höhe des gesuchten Cylinders.

Durch die Rechnung. Weil GI = a, GH = d: so ist Cyl. HI = $\frac{\pi a d^2}{4}$

MK = m, KL = n - - Cyl. ML = $\frac{\pi m n^2}{4}$

Es sey PN = x, NO = y - - Cyl. PO = $\frac{\pi x y^2}{4}$

Demnach wegen Cyl. ML : Cyl. PO = KLc : NOc

ist $\frac{\pi m n^2}{4} : \frac{\pi x y^2}{4} = n^3 : y^3$

und weil Cyl. PO = Cyl. IH, d. i. $\frac{\pi x y^2}{4} = \frac{\pi a d^2}{4}$

so ist $\frac{\pi m n^2}{4} : \frac{\pi a d^2}{4} = n^3 : y^3$

d. i. $m : ad^2 = n : y^3$

folglich $\sqrt[3]{\frac{a n d^2}{m}} = y$

Eben so, wegen Cyl. ML : Cyl. PO = MKc : PNc

ist $\frac{\pi m n^2}{4} : \frac{\pi a d^2}{4} = m^3 : x^3$

d. i. $n^2 : ad^2 = m^2 : x^3$

mithin $\sqrt[3]{\frac{a d^2 m^2}{n^2}} = x.$

Dieses vorausgesetzt, so ergeben sich vermittelst der Logarithmen

$\log d^2 = \log 196 = 2,2922561$	$\log d^2 = \log 196 = 2,2922561$
$\log n = \log 28 = 1,4471580$	$\log m^2 = \log 225 = 2,3521825$
$\log a = \log 25 = 1,3979400$	$\log a = \log 25 = 1,3979400$
$5,1373541$	$6,0423786$
$\log m = \log 15 = 1,1760913$	$\log n^2 = \log 784 = 2,8943161$
$3,9612628$	$3,1480625$
3)	3)
$\log y = 1,3204209$	$\log x = 1,0493542$
$NO = 20,91$	$NP = 11,20.$

Probe: Cyl. $PO = \frac{\pi x y^2}{4}$. Mithin mit Beybehaltung der gefundnen Logarithmen.

$\log y = 1,3204209$

$\log y^2 = 2,6408418$
$\log x = 1,0493542$
$\log \pi = \log 3,14 = 0,4969296$

$4,1871256$
$\log 4 = 0,6020600$

$3,5850656$

Inhalt 3846,5 wie oben.

Oder: $\frac{3,14 \times 11,2 \times \overline{20,91}^2}{4}$

$\overline{20,91}^2 = 437,2281$ (11,2)

4372281
8744562

4896,95472 (3,14)
1469086416
195878 1888

15376,4378208
4)

3844,1 Fehler 1,4.

§. 28. 13 Aufgabe: Eine Pyramide in ein Prisma zu verwandeln.

Auflösung. I Fall. Wenn die Grundfläche ungeändert bleiben soll: so bekommt das Prisma $\frac{1}{3}$ der Höhe der Pyramide.

II Fall. Soll die Höhe ungeändert bleiben: so bekommt das Prisma $\frac{1}{3}$ der Grundfläche der Pyramide. Diese Verjüngung der Grundfläche geschiehet vermittelst der Lin. geom. III Abschn. §. 17. Ist aber die Grundfläche eine ordentliche Figur, die zugleich, sie werde verjüngt, oder nicht, in eine andere ordentliche Figur verwandelt werden soll: so geschiehet dieses vermittelst der Lin. tetrag. IV Abschn. §. 8.

Es sey Tab. VII. Fig. 24 die Grundfläche der Pyramide ABCD ein gleichseitiges Dreyeck, dessen Seite AB=12 Z. sey, ihre Höhe DE=6 F. Demnach ist ihr Inhalt $\frac{1}{3}$ DE×ACB. Man behalte die Grundfläche ABC und gebe einem Prisma die Höhe FC=

$FC = \frac{1}{3} DE$: so ist dieses Prisma BF der Pyramide ABCD gleich. Denn sein Inhalt ist $FC \times ACB = \frac{1}{3} DE \times ACB$. Man mache das Dreyeck $GHI = \frac{1}{3} ACB$ und gebe dem Prisma GK die Höhe $IK = DE$: so ist sein Inhalt $IK \times GHI = DE \times \frac{1}{3} ACB = \frac{1}{3} DE \times ACB$. Verwandelt vermittelst der Lin. tetrag. das gleichseitige Dreyeck ABC in ein Viereck LN; oder rechnet aus der Tab. tetrag. des IV Abschn.

$$10000 : 6580 = 12\,Z. : LM$$

so ist $LM = 7{,}896$ Z. Gebet dem Pppdo LO die Höhe $NO = \frac{1}{3} DE$: so ist sein Inhalt $NO \times LMc = \frac{1}{3} DE \times ACB$.

§. 29. Zusatz.

Hieraus ist klar, wie 1) ein Kegel in einen Cylinder von gleicher Grundfläche verwandelt werde; 2) wie umgekehrt ein Prisma in eine Pyramide verwandelt werde, indem man bey einerley Grundfläche die Höhe des Prisma 3mal nimmt, oder bey einerley Höhe $\frac{1}{3}$ der Grundfläche des Prisma; folglich 3) wie ein Cylinder in einen Kegel von gleicher Grundfläche verwandelt werde.

§. 30. 14 Aufgabe: Einen prismatischen Körper in einen Kegel zu verwandeln.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 25, das Pppdum CD in einen Kegel zu verwandeln. Von der Grundfläche des Pppdi sey die Grundlinie $AB = 12$ Z. die Höhe $BC = 3$ Z. die Höhe des Pppdi $AD = 20$ Z. Suchet vermittelst der Lin. arithm. oder geom. zwischen AB, BC die mittlere Proportionallinie EF, als die Seite des der Grundfläche AC gleichen Vierecks II Abschn. §. 26, III Abschn. §. 6. Stellet EF auf der Lin. geom. überzwerch zwischen eine beliebige Zahl, deren 3faches kleiner als 100 ist, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen der 3fachen Zahl: so ist die ihr gleiche GH die Seite des der Grundfläche AC gleichen Vierecks. Verwandelt dieses Viereck vermittelst der Lin. tetrag. in einen Kreis, dessen Durchmesser IK ist, IV Abschn. §. 6: so ist der Kegel, der diesen Kreis zu seiner Grundfläche, und zu seiner Höhe $LM = AD$ hat, dem Pppdo CD gleich.

Durch die Rechnung. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$: so ist der Inhalt des Pppdi $CD = abc$. Es ist aber die Höhe des Kegels $ML = c$, und der Durchmesser seiner Grundfläche sey x: so ist der Inhalt des Kegels $\frac{\pi c x^2}{12} = abc$, demnach $\frac{\pi x^2}{12} = ab$ und $x = \sqrt{\frac{12 \times ab}{\pi}}$. Es ist aber $a = 12$, $b = 3$, $ab = 36$.

Mithin mit den Logarithmen
$$\begin{aligned} \log 36 &= 1{,}5563025 \\ \log 12 &= \underline{1{,}0791812} \\ &\quad 2{,}6354837 \\ \log 3{,}14 &= \underline{0{,}4969296} \\ &\quad 2)\,2{,}1385541 \\ \log x &= 1{,}0692770 \end{aligned}$$

Der Durchmesser des Kegels $IK = 11{,}73$ Z.

Soll die Grundfläche des Kegels der Grundfläche des Pppdi gleich bleiben, wo alsodie Höhe des ihm gleichen Kegels die 3fache Höhe des Pppdi wird: so ist die Grundfläche des Pppdi a.b, des Kegels, deren Durchmesser ist y heiße, $\frac{\pi y^2}{4}$. Mithin ist $a b = \frac{\pi y^2}{4}$, und $y = \sqrt{\frac{4 a b}{\pi}}$. Nun war vorher $x = \sqrt{\frac{12 \times a b}{\pi}}$: folglich $y = \sqrt{\frac{12 \times a b}{3 \pi}}$. Daher darf nur von dem vorigen Log. des Quotienten $\frac{12 \times a b}{\pi}$, der log 3 abgezogen und der Rest halbirt werden.

Nämlich

$$\begin{array}{rl} & 2,1,38554,1 \\ \log 3 = & 0,4771213 \\ \hline & 1,6614328 \\ 2) & \\ \hline \log y = & 0,8307164, \end{array}$$

also y = 6,77 Z. Die Höhe 3c = 60 Z.

§. 31. 15 Aufgabe: Einen Kegel in einen Cylinder und umgekehrt zu verwandeln.

Auflösung. Weil der Kegel $\frac{1}{3}$ eines Cylinders ist, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat: so ist 1) ein Cylinder, der mit dem Kegel gleiche Grundfläche hat und dessen Höhe $\frac{1}{3}$ der Höhe des Kegels ist, diesem Kegel gleich, und 2) ist ein Kegel, der mit einem Cylinder gleiche Grundfläche hat, und dessen Höhe die 3fache Höhe des Cylinders ist, diesem Cylinder gleich. Hieraus ist also die Rechnung begreiflich.

§. 32. 16 Aufgabe: Ein Prisma in einen gleich hohen Cylinder zu verwandeln.

Auflösung. Die Grundfläche des Prisma sey eine ordentliche geradelinichte Figur. Verwandelt diese vermittelst der Lin. tetrag. IV Abschn. §. 6 in einen Kreis: so ist dieser diese Grundfläche des ihm gleichen und gleich hohen Cylinders. Ist die Grundfläche eine unordentliche geradelinichte Figur: so verwandelt sie in ein Viereck und dieses in einen Kreis, IV Abschn. §. 19.

Durch die Rechnung. Es sey die Grundfläche des Prisma ein ordentliches Fünfeck, dessen Seite Tab. VII Fig. 26, N O = 55 Z. so findet man aus der Tab. tetrag.

$$5017 : 3712 = 55 : \tfrac{1}{2} PQ$$

Demnach der Halbmesser 40,69 und der Durchmesser P Q = 81,38 Z.

§. 33. 17 Aufgabe: Einen Cylinder in einen Würfel zu verwandeln.

Auflösung. Es ist z. E. das Breslauische Quart einem Cylinder gleich, dessen Durchmesser Tab. VII. Fig. 27, R S = 41,4 Lin. die Höhe R T = 45 Lin. Pariser Maaß.

(S. Oeko-

(S. Oekonom. Nachr. der Schles. Patr. Gesellsch. VI B. 47 St.) Wie groß ist die Seite des ihm gleichen Würfels? Suchet vermittelst der Lin. tetrag. die Seite V W eines Vierecks, welches der Grundfläche des Cylinders gleich ist. Diese beträgt hier 36,7 Lin. Suchet zwischen V W und der Höhe des Cylinders R T zwey mittlere Proportionallinien §. 5. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 36,7 Theile, stellet diese auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 36,7; und unverrückt nehmet die Weite zwischen 45. Diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt, sind 39,2 Theile, daß also die gesuchte Seite des Würfels X Z = 39,2 Lin. beträgt.

Durch die Rechnung. Der Inhalt des Cylinders ist $\frac{\pi a d^2}{4}$, folglich die Seite x des ihm gleichen Würfels $\sqrt[3]{\frac{\pi a d^2}{4}}$. Hier ist a = 45, d = 41,4, mithin mit den Logarithmen

$$\begin{array}{lrl}
\log d^2 = 2 \log 41{,}4 = & & 3{,}2340006 \\
\log a = \log 45 = & & 1{,}6532125 \\
\log \pi = \log 3{,}14 = & & 0{,}4969296 \\
\hline
 & & 5{,}3841427 \\
\log 4 = & & 0{,}6020600 \\
\hline
 & & 4{,}7820827 \\
 & 3) & \\
\hline
\log x = & & 1{,}5940276
\end{array}$$

Die Seite eines dem Breslauischen Quart gleichen Würfels ist 39,27 Lin. und der Inhalt 60546 Paris. Cub. Lin.

§. 34. Zusatz.

Der Inhalt der Breslauischen Metze beträgt 233 $\frac{1}{8}$ = 233,125 Paris. Cub. Zolle (Oek. Nachr. a. a. O. S. 384). Die Cub. Wurzel ist 6,154, das sind 6 Z. 1,7 Lin. Diese Länge der Seite eines Würfels, der einer Breslauischen Metze gleich ist, nehme man zur Einheit an, trage sie auf einen Maaßstab etlichemal, und theile den ersten Theil in 10 Theile ein: so kann man damit den Inhalt eines viereckichten mit Getreide, Mehl ꝛc. angefüllten Kastens finden, vorausgesetzt, daß die Oberfläche des Getreides geebnet ist. Es betrage mit einem solchen Maaßstabe gemessen z. E. die Länge 12, die Breite 8, die Tiefe 6 solcher Theile: so ist der Vorrath 12 × 8 × 6 = 576 Metzen = 3 Maltern.

§. 35. 18 Aufgabe: Einen Würfel in einen andern prismatischen Körper zu verwandeln.

Auflösung. Es sey ein Würfel, dessen Seite c = 6, in ein rechtwinklichtes Pppdum zu verwandeln. Da nun Länge, Breite und Höhe den Inhalt eines Pppdi geben: so müssen von diesen drey Stücken zwey gegeben seyn, um das dritte zu finden. Denn wenn keines

oder

oder nur eines gegeben ist, so sind unendlich viel Pppda möglich, welche dem gegebenen Würfel gleich sind. Es sey also eines Pppdi Länge $a = 8$, Breite $b = 9$, die Höhe x: so ist $abx = c^3$, folglich $x = \frac{c^3}{ab} = \frac{c^2}{a} \times \frac{c}{b}$. Suchet zu a, c die dritte Proportionallinie $\frac{c^2}{a}$ II Abschn. §. 22, und zu b, $\frac{c^2}{a}$ — c, die vierte Proportionallinie, II Abschn. §. 24, so ist diese $\frac{c^2}{a} \times \frac{c}{b} = x$. Auch ist $x = \frac{216}{72} = 3$, und $a\,b\,x = 8.\,9.\,3. = 216 = c^3$.

§. 36. 19 Aufgabe: Eine Kugel in einen Cylinder zu verwandeln.

Auflösung. Es sey der Durchmesser der Kugel d: so ist ihr Inhalt $\frac{\pi d^3}{6}$ §. 21. Wenn also im I Fall die Höhe des Cylinders seinem Durchmesser gleich seyn soll, der x heiße: so ist sein Inhalt $\frac{\pi x^3}{4} = \frac{\pi d^3}{6}$, demnach $6x^3 = 4d^3$ und also $d^3 : x^3 = 6 : 4 = 30 : 20$, auch $d : x = \sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{20}$. Stellet daher den Durchmesser der Kugel auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 30, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 20: so ist diese die Höhe und der Durchmesser des gesuchten Cylinders. Es sey $d = 1$ F. zehnth. mithin $3 : 2 = 1000000$ Cub. Lin: 666666 Cub. Lin. und es ist $x = \sqrt[3]{666666} = 87{,}3$ Lin. Wäre im II Fall die Höhe des Cylinders a gegeben und sein Durchmesser x gesucht: so ist dessen Inhalt $\frac{\pi a x^2}{4} = \frac{\pi d^3}{6}$, mithin $6ax^2 = 4d^3$ und $x^2 = \frac{4d^3}{6a} = \frac{2d^2 \times d}{3a}$, $x = \sqrt{\frac{2d^2 \times d}{3a}}$. Suchet also zu $3a$, $2d$ und d die vierte Proportionallinie, II Abschn. §. 24, welche $\frac{2d^2}{3a}$ ist; und zu $\frac{2d^2}{3a}$ und d die mittlere Proportionallinie, II Abschn. §. 26, III Abschn. §. 6: so ist diese $\sqrt{\frac{2d^2 \times d}{3a}} = x$. Es sey für $d = 1$ F. $a = 2$ F. so ist $a = 2d$, mithin $\sqrt{\frac{2d^3}{3a}} = \sqrt{\frac{2d^3}{6d}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = \sqrt{\frac{10000}{3}} = \sqrt{3333} = 57{,}7$ Lin.

§. 37. Eintheilung des Caliberstabes.

I. Erstlich muß der Durchmesser, welcher in der Artillerie der Caliber heißt, der 1pfündigen z. E. eisernen Kugel nach einem gegebenen Gewicht z. E. dem Nürnbergischen, in einem gegebenen Maaß z. E. dem Pariser gefunden werden. Nach dem Bion in der Math. Werkschule II B. 2 Cap. S. 77, wiegt 1 Cub. F. Eisen Par. Maaß. 558 Par. Pf. Folglich 1 Pf. $= \frac{1}{558}$ Cub. F. Allein 1 Cub. F. zwölfth. ist $= \overline{144}^3$ Cub. Lin. $= 2985984$ Cub.

Cub. Lin. mithin 1 Pf. = $\frac{2985984}{558}$ = 5351 Cub. Lin. Demnach für den Durchmesser d einer Kugel dieses Inhalts in Par. Gewicht und Maaß, ist 157 : 300 = 5351 Cub. Lin. : d^3, welches d^3 = 10224 giebt. Weil aber 1 Pf. Par. : 1 Pf. Nürnb. = 95 : 100, so ist 95 : 100 = 10224 Cub. Lin. : 10762 Cub. Lin. folglich der Durchmesser der 1pf. Kugel Nürnb. Gewichts $d = \sqrt[3]{10762}$ = 22 Lin. = 1 Z. 10 Lin. Par. Maaß, welches auf den gewöhnlichen Caliberstäben völlig zutrifft.

II. Da sich nun Kugeln, wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten: so stellet 1 Z. 10 Lin. Paris. Maaß, auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 1 und traget nach und nach die bey unverrückten Pr. Z. überzwerch genommene Weiten zwischen 2, 3, 4 rc. auf den Caliberstab auf: so sind diese die Durchmesser der 2, 3, 4 rc. pfündigen eisernen Kugeln nach Nürnb. Gewicht.

III. Will man sich nicht auf den Prop. Zirkel verlassen, so gute Dienste als er hier leisten kann: so kann man die Durchmesser der vielpfündigen Kugeln in dem gegebenen Maaß aus der Tafel berechnen und vom Maaßstabe auftragen. Die Berechnung selbst kann man sich mit den Logarithmen also erleichtern. Weil die Verhältnis des Durchmessers der 1fachen Kugel überhaupt zum Durchmesser der 1pfündigen Kugel, hier 2154 : 22 Lin. beständig ist; so suche man den log $\frac{22}{2154}$. Dieser ergiebt sich aus

$$\begin{aligned} \log 22 &= 1{,}3424227 \\ \log 2154 &= 3{,}3332457 \\ \hline \log \text{const.} &= -2{,}0091770 \end{aligned}$$

Zu diesem log const. dürfen nur nach und nach die logg. der Durchmesser der vielfachen Kugeln addirt werden. Mithin

$$\begin{aligned} \log \text{const.} &= -2{,}0091770 \\ \log 2714 &= 3{,}4336098 \\ \hline &\ 1{,}4427868 \quad \text{Durchmesser der 2pf. 27,7 Lin.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{const.} &= -2{,}0091770 \\ \log 3107 &= 3{,}4923413 \\ \hline &\ 1{,}5015183 \quad \text{. . . 3pf. 31,7 Lin. u. s. w.} \end{aligned}$$

IV. Um die Durchmesser der 1, 2, 3 rc. löthigen Kugel zu finden, stellet den Durchmesser der 1pfündigen auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 32, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen 1, 2, 3 ... 31 und traget diese auf den Caliberstab auf.

Durch die Rechnung. Der Würfel des Durchmessers der eisernen 1pf. Nürnb. Kugel beträgt in Par. Maaß 10762 Cub. Lin. folglich von der 1löthigen $\frac{10762}{32}$ = 333,2

Cub. Lin. Die Wurzel ist 6, 9 Lin. Von der 2löthigen ist der Würfel des Durchmessers $\frac{10762}{16} = 672$ Cub. Lin. Die Wurzel ist 8, 7 Lin. u. s. w.

V. Hat man aus dem Caliber der 1pf. Kugel, den Caliber des Stückes gefunden, wie Herr Hofr. Kästner im alten Hamb. Magaz. III B. S. 486 f. gelehrt hat, welche Abhandl. auch in des Herrn Geh. R. Böhms Magaz. für Ing. und Artill. V B. S. 234 f. eingerückt worden ist: so kann man die Caliber der vielpfündigen Stücke ebenfalls sehr leicht vermittelst der Lin. cub. finden und auftragen, wozu ein großer Prop. Z. sehr nützlich ist.

Es ist klar, daß es eben so sich mit dem Auftragen der Caliber der bleyernen und steinernen Kugeln verhalte.

§. 38. Zusatz.

Wenn der Durchmesser einer weit größern Kugel gesucht würde, als so weit man auf einem Caliberstabe zu gehen pfleget, z. E. der 512pfündigen: so stellet den Durchmesser der 1pf. auf der Lin. cub. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen $64 = \frac{512}{8}$, welche, doppelt genommen, der gesuchte Durchmesser ist, wegen $2\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{512}$.

Durch die Rechnung. Der Durchmesser der 1pf. Nürnb. eisernen Kugel ist 22 Par. Lin. Mithin vermittelst der Logg. ist

$$\begin{array}{rl} \log \overline{22}^3 = \log 10648 = & 4,0272680 \\ \log \quad 512 = & \underline{2,7092700} \\ & 6,7365380 \\ 3) & \overline{2,2455127} \end{array}$$

Der Durchmesser der 512 pf. ist genau 127 Lin. oder 1 F. $2\frac{3}{4}$ Z.

§. 39. Von den Visirstäben, und zwar 1) von dem sogenannten gemeinen.

Eine hieher gehörige Untersuchung betrifft die Visirstäbe, von welchen man dreyerley Arten angegeben findet, den gemeinen, Quadrat- und Cubicstab. Die Eintheilung des gemeinen beruhet auf den, was §. 34 gewiesen worden. Man suchet den Inhalt des Maaßes, nimmt diesen für dem Inhalt eines Würfels an und suchet dessen Seite. Vermöge §. 33 beträgt diese Seite für das Breslauische Quart $39\frac{1}{4}$ Par. Lin. Diese Länge, als die Einheit, träget man so oft auf einen Stab auf, als man will, oder als es angehet. Mit einem solchen Stabe messet von einem Faß den Durchmesser eines Bodens, wenn beyde Boden gleich sind, wie sie seyn sollen, ferner die Spundtiefe, und äquiret beyde, d. i. suchet zwischen beyden Durchmessern den arithmetisch mitlern. Berechnet den Inhalt des Kreises für diesen

äquirten Durchmesser. Messet mit dem Stabe die Länge des Fasses und multiplicire den Inhalt des eben beschriebenen Kreises mit der Länge: so ist das Product der Inhalt des Fasses, welches man gemeiniglich für einen Cylinder hält, dessen Durchmesser der äquirte Durchmesser der Boden und der Spundtiefe, die Höhe aber die Länge des Fasses ist.

Z. E. mit einem solchen Visirstabe, auf welchem man die Seite eines Würfels, der dem Breslauischen Quart gleich ist, zur Einheit angenommen, werde bey einem Faß der Durchmesser jedes von beyden Boden von 3,8; die Spundtiefe von 4,2; die Länge aber von 6 solchen Theilen gefunden. Mithin hat der äquirte Durchmesser $\frac{3,8+4,2}{2} = 4$ solcher Theile. Den Inhalt des ihm zukommenden Kreises findet man aus der beständigen Verhältnis des Durchmessers eines Kreises zu seinem Inhalt, $1000 : 785 = 16 : 12\frac{1}{2}$. Folglich ist der Inhalt des Fasses $12\frac{1}{2} \times 6 = 75$ Quart, also um 5 Quart kleiner, als der Eymer.

Allein es kann im gemeinen Leben ein solcher Visirstab nicht angenommen werden, weil man dem Visirer dabey zu viel Kenntnis von der Geometrie zumuthen müßte. Nur einige alte Rechenmeister, wo nicht alle im 16ten Jahrhundert nahmen in ihren Rechenbüchlein das Visiren mit.

§. 40. 2) Vom Quadrat-Visirstabe.

Die Eintheilung und Anwendung eines solchen Visirstabes wird in den meisten Anfangsgründen gelehrt, als in Wolffs Auszuge der Geom. §. 213-216, ob er gleich auch nicht üblich ist. Die Eintheilung gründet sich, wie bekannt, darauf, daß gleich hohe Cylinder sich wie ihre Grundflächen, folglich wie die Vierecke ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also die Höhe und der Durchmesser des Maaßes z. E. des Breslauischen Quarts, jene von 45, diese von 41,4 Par. Lin. gegeben ist: so kann man vermittelst der Lin. geom. die Durchmesser des 2, 3, 4 &c. fachen Cylinders finden und auf den Stab auftragen. Stellet nämlich den Durchmesser des 1fachen Cylinders auf der Lin. geom. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen 2, 3, 4 &c. so sind diese die gesuchten Durchmesser. Wenn der Durchmesser des Maaßes zu groß ist, um ihn zwischen 1 überzwerch stellen zu können, wie z. E. 41,4 Par. Lin. so stellet dessen Hälfte 20,7 Par. Lin. dazwischen; und die unverrückt überzwerch genommene Weiten zwischen 2, 3, 4 &c. sind die Halbmesser des 2, 3, 4 &c. fachen Maaßes. Uebrigens wird die Höhe des Maaßes, z. E. von 45 Par. Lin. auf die andere Seite des Stabes so oft aufgetragen, als es angehet. Die bekannte Anwendung eines solchen Visirstabes ist für besoldete Visirer auch noch zu weitläufig, sondern man bedienet sich des cubischen, dessen Eintheilung und Anwendung in den meisten practischen Büchern nicht vorkommt, und daher mitgenommen zu werden verdienet.

§. 41. 3) Vom Cubischen Visirstabe.

I. Verwandelt das Maaß in einen Cylinder, dessen Durchmesser der Höhe gleich sey §. 26. Es sey des gesuchten Cylinders Durchmesser Tab. VII Fig. 28, AB=x, so ist z. E.

 für

für das Bresl. Quart $\frac{\pi x^3}{4} = 60546$ Par. Cub. Lin. §. 36, mithin $x = \sqrt[3]{\frac{4 \times 60546}{3,14}} = \sqrt[3]{77128} = 42\frac{1}{2}$ Lin.

II. Ferner suchet den sogenannten **Kreuzdurchmesser** eines solchen Cylinders $BC = \sqrt{2\,AB\,q}$. Oder, um weniger zu fehlen, setzet $CB = y$: so ist $y^2 = 2x^2$, und also $y\sqrt{\frac{1}{2}} = x$, folglich $y^3\sqrt{\frac{1}{8}} = x^3$ Demnach wird $\frac{\pi x^3}{4} = \frac{\pi y^3 \sqrt{\frac{1}{8}}}{4} = \frac{\pi y^3}{4\sqrt{8}} = 60546$ Cub. Lin. mithin $y = \sqrt[3]{\frac{4 \times \sqrt{8} \times 60546}{3,14}}$. Mithin vermittelst der Logarithmen

$$\begin{array}{rl} \log\ 8 = & 0,9030900 \\ \log\sqrt{8} = & 0,4515450 \\ \log\ 60546 = & 4,7820855 \\ \log\ 4 = & 0,6020600 \\ \hline & 5,8356905 \\ \log 3,14 = & 0,4969296 \\ \hline & 5,3387609 \\ 3) & 1,7795869 \end{array}$$

Der Kreuzdurchmesser beträgt 60,2 Lin.

III. Es sind aber alle Cylinder ähnlich, die gleiche Höhe mit dem Durchmesser haben. Da nun ihre **Durchmesser** (nämlich, wie bisher immer darunter zu verstehen gewesen, die **Durchmesser ihrer Grundflächen**) sich wie ihre Kreuzdurchmesser, und ähnliche Cylinder wie die Würfel ihrer Durchmesser sich verhalten: so verhalten sich auch ähnliche Cylinder wie die Würfel ihrer Kreuzdurchmesser. Demnach darf man nur vermittelst der Lin. cub. zu dem gegebenen Kreuzdurchmesser des 1fachen Cylinders die Kreuzdurchmesser des 2, 3, 4 ꝛc. fachen Cylinders suchen und auf einen Stab auftragen: so erhält man die Kreuzdurchmesser des 2, 3, 4 ꝛc. fachen Maaßes.

IV. Ist also eines Cylinders Höhe oder Länge EF Tab. VII Fig. 29, dem doppelten Durchmesser der Grundfläche EG gleich: so ist, wegen HG=HI, sein Inhalt zweymal so groß, als HG der Kreuzdurchmesser von einem vielfachen Maaße ist. Wäre z. E. HG der Kreuzdurchmesser des 40fachen Quarts: so ist der Inhalt des Cylinders GI $2 \times 40 = 80$ Quart.

V. **Man gebe daher einem Fasse zu seiner Länge den doppelten äquirten Durchmesser der Spundtiefe und des Bodens.** Die 30ste Fig. stelle den Durchschnitt eines Fasses durch seine Axe vor, so, daß LM=NO den Durchmesser des Bodens, KP die Spundtiefe, $EG = FI = \frac{ML + KP}{2}$ den äquirten Durchmesser, und die Länge MN=LO=EF=GI=2EG den doppelten äquirten Durchmesser gleich. Stecket den Visirstab schief

schief durch das Spundloch K in L: so ist, wegen KH=LG und weil beyde parallel sind, auch LK=GH und parallel, Euclid. I B. 33 S. Nun ist GH der Kreuzdurchmesser eines Cylinders, dessen Höhe EH dem Durchmesser EG gleich ist, das Faß aber kann für einen Cylinder gehalten werden, dessen Durchmesser EG und die Länge EF=2EH=2EG ist. Folglich zeiget die bey K am Visirstabe beygeschriebene Zahl den Inhalt des halben Fasses, oder, wie es gewöhnlich ist, den Inhalt des ganzen Fasses an. Wäre z. E. das Stücke KL der durch den Kreuzdurchmesser des Quarts bestimmte Kreuzdurchmesser des 40fachen Quarts: so stehet dabey die Zahl 80 oder 1, und das Faß hielte einen Eymer. Folglich hat der Visirer bey diesem Verfahren nur gesunde Augen nöthig, ohne das Einmaleins zu wissen.

VI. Falsch ist es also, wenn der Cubische Visirstab bey Fässern angewendet wird, welche nicht nach der Bedingung N. V gemacht worden. Ist die halbe Länge des Fasses größer, als der äquirte Durchmesser: so giebt man den Inhalt zu groß an; ist jene kleiner, als dieser: so wird der Inhalt zu klein angegeben.

* Nach der vorgeschriebenen Bedingung werden die Weinfässer im Oesterreichischen verfertigt. S. Keplers Nouam Stereometriam Doliorum Vinariorum, Lincii 1615 f. Auszug aus der uralten Messe-Kunst Archimedis, Lintz 1616 f. Tiefsinnige Untersuchungen über die Gestalt der Fässer enthält I. MATTH. HASII Doliorum Dimensionis S. Pithometriae Theoria et Praxis noua Vitemb. 1728, 4, eine nicht mehr gemeine Sammlung, deren P. I. III aus zwey akad. Streitschriften bestehet, wovon der Urheber Christian Martini, ein Breslauer ist, und wozu Hase, welcher vielen Antheil daran gehabt hatte, den 4ten Theil verfertigt hat, auch alles mit einem allgemeinen Titel versehen. Auch gehören hieher Lamberts Beyträge zur Mathematik I Th. N. 2. III Th. N. 2.

§. 42. Vom Caliber- und Visirriemen.

Weil Caliber- und Visirstäbe nicht bequem in die Tasche gesteckt werden können: so haben einige aus beyden Caliber- und Visirriemen gemacht. Ich habe beyderley zur Hand. Der Caliberriemen enthält die Durchmesser der Kugeln, wie der Stab. Auf dem Visirriemen ist eine doppelte Eintheilung. Auf der einen Seite stehet beygeschrieben: Von der vntern Zarge, vbern Haupt Reiff bis mitten des Fasszes oben beim Spont. 40. Eymer Oestreichisch: Auf der andern: Hungarisch 30. Eymer. Die Eintheilung eines solchen Riemens setzet ein Probefaß voraus, und eine ihm ähnliche Gestalt aller übrigen größeren und kleineren, deren Inhalt damit gefunden werden soll; und beruhet darauf, daß ähnliche Körper sich wie die Würfel ähnlich liegender Seiten oder ähnlich liegender und ähnlicher Bogen verhalten. Wenn also diese Bogen in gerade Linien verwandelt werden: so findet man die Länge solcher Bogen für die vielfachen Maaße durch die Berechnung nach der Tafel, weil hierzu der größte Prop. Z. zu klein ist. Weil aber dergleichen Verfahren aus sehr vielen Ursachen trügen kann: so pflegt man sich kaum des Visirriemens zu bedienen.

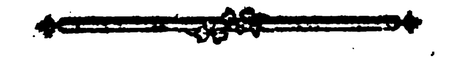
§. 43. Von Berechnung des Inhalts der Baumstämme.

Weil Bäume in ihrer Dicke nach und nach abnehmen, und also ihre Stämme als Cylinder nicht berechnet werden können: so sind die Practici hierinnen verschiedene Wege gegangen. Einige nehmen einen Stamm als einen Cylinder an, dessen Durchmesser der äquirte größte und kleinste Durchmesser ist; andere, als einen abgekürzten Kegel. Jene möchten noch am wenigsten fehlen, bey diesen aber kommt der Inhalt ohnstreitig zu klein heraus. Ohne mich hier in diese Untersuchung näher einzulassen: so bleibe ich mit dem Scheffelt bey der ersten Methode stehen, und nehme mit ihm einen Stamm an, der z. E. oben 2 F. unten 3 F. dicke und 20 F. lang ist. Mithin ist der äquirte Durchmesser 2,5 F. und also der Inhalt $\frac{\pi a d^2}{4}$ hier $\frac{3,14 \times 20 \times \overline{2,5}^2}{4}$ Cub. F. $= 3,14 \times 5 \times \overline{2,5}^2$ Cub. F. Demnach vermittelst der Logarithmen

$$\begin{aligned} \log \overline{2,5}^2 = \log 6,25 &= 0,7958800 \\ \log 5 &= 0,6989700 \\ \log 3,14 &= 0,4969296 \\ \hline &\ \ 1,9917796 \end{aligned}$$

Folglich der Inhalt dieses Stammes 98,12 Cub. F.

Dieses sind, den Fuß für die halbe Elle genommen, $\frac{98,12}{8} = 12\frac{1}{4}$ Cub. Ellen. Der ordinaire Stoß Holz ist in Breslau 10 Ellen lang, 5 Ellen hoch, und jedes Scheit $1\frac{1}{2}$ Ellen lang. Folglich sein Inhalt 75 Cub. Ellen. Mithin würde man zu einem Stoß Holz 6 solche Bäume nöthig haben, welche $73\frac{1}{2}$ Cub. E. zu ihrem Inhalt haben; die fehlende $1\frac{1}{2}$ Cub. Elle würde auf die Räume zwischen den Scheiten zu rechnen seyn. Es ist begreiflich, daß man sich hierzu Stäbe wie einen Visirstab verfertigen könne, auf dessen einer Seite vermittelst der Lin. geom. die Durchmesser der vielfachen Kreise aufzutragen wären, deren einfacher zu seinem Inhalt 1 Quadr. F. hat, wo man dessen Durchmesser mit Hülfe der Lin. tetrag. finden könnte; auf der andern Seite aber der Längen-Fuß so oft, als es angehet.



X. Von der Linea Chordarum.

Tafel für die Eintheilung der Lineae Chordarum.									
Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.
1.	87.	34.	2924.	67.	5519.	100.	7660.	133.	9171.
2.	175.	35.	3007.	68.	5592.	101.	7716.	134.	9205.
3.	262.	36.	3090.	69.	5664.	102.	7771.	135.	9239.
4.	349.	37.	3173.	70.	5736.	103.	7826.	136.	9272.
5.	436.	38.	3256.	71.	5807.	104.	7880.	137.	9304.
6.	523.	39.	3338.	72.	5878.	105.	7934.	138.	9336.
7.	610.	40.	3420.	73.	5948.	106.	7986.	139.	9367.
8.	698.	41.	3502.	74.	6018.	107.	8039.	140.	9397.
9.	785.	42.	3584.	75.	6088.	108.	8090.	141.	9426.
10.	872.	43.	3665.	76.	6157.	109.	8141.	142.	9455.
11.	958.	44.	3746.	77.	6225.	110.	8192.	143.	9483.
12.	1045.	45.	3827.	78.	6293.	111.	8241.	144.	9511.
13.	1132.	46.	3907.	79.	6361.	112.	8290.	145.	9537.
14.	1219.	47.	3987.	80.	6428.	113.	8339.	146.	9563.
15.	1305.	48.	4067.	81.	6494.	114.	8387.	147.	9588.
16.	1392.	49.	4147.	82.	6561.	115.	8434.	148.	9613.
17.	1478.	50.	4226.	83.	6626.	116.	8480.	149.	9636.
18.	1564.	51.	4305.	84.	6691.	117.	8526.	150.	9659.
19.	1650.	52.	4384.	85.	6756.	118.	8572.	151.	9681.
20.	1736.	53.	4462.	86.	6820.	119.	8616.	152.	9703.
21.	1822.	54.	4540.	87.	6884.	120.	8660.	153.	9724.
22.	1908.	55.	4617.	88.	6947.	121.	8704.	154.	9744.
23.	1994.	56.	4695.	89.	7009.	122.	8746.	155.	9763.
24.	2079.	57.	4772.	90.	7071.	123.	8788.	156.	9781.
25.	2164.	58.	4848.	91.	7133.	124.	8829.	157.	9800.
26.	2250.	59.	4924.	92.	7193.	125.	8870.	158.	9816.
27.	2334.	60.	5000.	93.	7254.	126.	8910.	159.	9833.
28.	2419.	61.	5076.	94.	7314.	127.	8949.	160.	9848.
29.	2504.	62.	5150.	95.	7373.	128.	8988.	165.	9914.
30.	2588.	63.	5225.	96.	7431.	129.	9026.	170.	9962.
31.	2672.	64.	5299.	97.	7490.	130.	9063.	175.	9990.
32.	2756.	65.	5373.	98.	7547.	131.	9100.	180.	10000.
33.	2840.	66.	5446.	99.	7604.	132.	9135.		

§. 1. Er-

§. 1. Erklärung und Gebrauch dieser Linie.

Die Linea Chordarum dienet, die Grade eines gegebenen Bogens für sich, oder, in so fern er als das Maaß eines Winkels betrachtet wird, aus der Verhältnis seiner Sehne zum Durchmesser zu finden. Weil aber die halbe Sehne eines Bogens der Sinus des halben Bogens ist: so kann sie zugleich als eine Linea Sinuum gebraucht werden. Sie ist daher, wenn man sich für trigonometrischen Rechnungen fürchtet, oder, wenn es auf eine Handvoll Minuten nicht ankommen darf, von großem Nutzen.

§. 2. Eintheilung.

Die gewöhnlichen Sinustafeln geben sie für einzele Grade und Minuten in 10000000 Theilen des Halbmessers an. Weil aber der Sinus totus zum Sinus eines Bogens sich wie der doppelte Sinus totus, d. i. die Sehne von 180°, oder der Durchmesser zum doppelten Sinus dieses Bogens, d. i. der Sehne des doppelten Bogens, verhält: so kann man der Sehne von 180° eben so viel Theile geben, als der Sinus totus hat, und der Sehne des einfachen Bogens eben so viel Theile, als der Sinus des halben Bogens hat. Demnach, wenn die Sehne von 180° = 10000000, so hat z. E. die Sehne von 60° so viel Theile, als der Sinus von 30°, nämlich 5000000; die Sehne von 1° eben so viel, als der Sinus von 30′ u. s. w. Da es nun hinlänglich ist, der Sehne von 180°, 10000 Theile zu geben: so ergiebt sich vorstehende Tafel aus den gewöhnlichen Sinustafeln, wenn man die Sinusse der halben Bogen excerpirt und die drey letzten Ziffern mit gehöriger Ergänzung; wenn etwa die weggelassenen Ziffern beynahe $\frac{1}{10000}$ betrügen, wegläßt; auch die Eintheilung der Linie selbst aus dem 1000theilichten Maaßstabe, wenn man die letzte Ziffer bey jeder Zahl der Tafel wegläßt; oder aus dem 2000theilichten, wenn man die Zahlen der Tafel duplirt und die letzte Ziffer wegläßt.

§. 3. Erinnerung wegen dieser Linie.

Es ist nicht zu läugnen, daß die Unterschiede der Sehnen der Bogen, je weniger diese vom halben Umkreise verschieden sind, desto kleiner werden, und zwar so klein, daß auf dem im I Absch. §. 5 beschriebenen großen Prop. Zirkel, die vom 160 Gr. an, und auf der Zeichnung Tab. I Fig. 1 vom 150 Gr. an, sich nicht mehr deutlich für einzele Grade haben angeben lassen. Daher hat Lambert auf seinem Prop. Zirkel lieber die Sinusse selbst angenommen, Barnikel aber und andere nur die Sehnen des Quadranten. Indessen, da man hier von der gewöhnlichen Einrichtung so vieler vorhandener Pr. Z. nicht abweichen können: so kann, im Fall die Sehne eines großen Bogens sich nicht genau angeben ließe, dieser durch die Sehne des Supplementsbogens bestimmt werden.

§. 4. 1 Aufgabe: Den Sinus der Hälfte eines gegebenen Bogens zu finden.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 1 Chord ADB = Chord 120° gegeben, man suchet Sin 60°. Dieser ist $BE = \frac{1}{2} BA$. Es ist aber $FC = \frac{1}{2} FG$ der Sinus totus. Weil nun

FC : BE =

FC:BE=FG:BA, d. i. sin tot : sin 60° = Chord 180° : Chord 120°; so stellet 100 Theile der Lin. arithm. auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 180 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 120°: so hat diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt, 86,6 Theile.

§. 5. 2 Aufgabe: Einen Quadranten in einzele Grade einzutheilen.

Auflösung. Stellet den Halbmesser KH Tab. VII Fig. 2 auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60. Um zuerst wegen dem Bogen KI sicher zu seyn, nehmet unverrückt und überzwerch die Weite zwischen 90°, welcher die Sehne KI gleich seyn muß. Nehmet überzwerch und unverrückt die Weite zwischen 30 für die Puncte des 30°, 60°, welche zuletzt in I treffen muß, ferner die Weite zwischen 10 für die Puncte des 10, 20, 40, 50, 70, 80sten Grad u. s. w.

* Bey großen Zeichnungen oder bey Eintheilung großer Winkelmesser ist es am sichersten, sich für den Halbmesser einen besondern Maaßstab zu verfertigen, diesen in möglichst kleine Theile auf das sorgfältigste einzutheilen, und so vermittelst eines Stangenzirkels nach den Tafeln die Sehnen für die vornehmste Theilungspuncte abzutragen. Hieher gehört die wichtige Schrift des großen Engländischen Künstlers JOHN BIRD's Method of dividing astronomical Instruments. Published by Order of the Commissioners of Longitude. Lond. 1767. Med. Qu. $2\frac{1}{2}$ Bog. 1 Kupf. taf. und die damit verbundene Method of constructing Mural Quadrant 1768. $3\frac{1}{2}$ Bog. 3 K. t. Die erste hat Hr. Hofr. Kästner größtentheils übersetzt und erläutert in seinen Astronom. Abhandl. II Samml. S. 188-215. Beyde kosten, der vortrefflichen Kupfertafeln ohnerachtet, in London nur $2\frac{1}{2}$ Schill. Deutsche Künstler, von welchen man nur Boussolen und Transporteurs verlangt, kennen solche Schriften zu wenig.

§. 6. 3 Aufgabe: In einem gegebenen Kreise eine ordentliche Figur zu beschreiben.

Auflösung. Stellet den gegebenen Halbmesser LM Tab. VII Fig. 3 auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 120, 90, 72, 60 rc. als die Seite des 3, 4, 5, 6 rc. Ecks, welche herumgetragen wird.

Oder bloß vermittelst eines tausendtheilichten Maaßstabes. Messet den gegebenen Halbmesser; solcher sey z. E. 4 Decim. Zoll. Wenn nun ein Fünfeck in einem Kreise beschrieben werden soll: so schließet 5000 : 5878 = 4' : Chord 72° als der Seite des Fünfecks, welche also 4'7''0'''2'''' beträgt.

Soll umgekehrt der Halbmesser aus der gegebenen Seite gefunden werden, z. E. für die Polygone einer fünfeckichten Citadelle von 36 R. so schließet: 5878 : 5000 = 36 : 30,62 R.

§. 7. 4 Aufgabe: Einen gegebenen Winkel zu messen.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 4 der Winkel PNO gegeben. Beschreibet mit einem beliebigen Halbmesser zwischen beyden Schenkeln einen Bogen. Stellet den Halbmesser NO auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60, und versuchet unverrückt, zwi-

schen welche Zahl die Sehne dieses Bogens OP sich überzwerch stellen lasse. Sie sey 35: so hat der Winkel PNO 35°.

* Nämlich, wie Scheffelt richtiger, als mancher Theoreticus anmerkt, der Winkel hat an und vor sich keine Grade, sondern der Bogen. S. VIII Abschn. §. 1.

Folglich trifft für den stumpfen Winkel PNQ die Sehne PQ bey unverrücktem Zirkel zwischen 145.

Ist der Winkel sehr stumpf, wie QNR, so daß der Pr. Zirkel die Grade für die Sehne QR nicht mehr genau angiebt: so versuchet, zwischen welche Zahl die Sehne des Ergänzungsbogens RO überzwerch treffe. Sie sey 15: so hat der Winkel QNR 165°.

§. 8. 5 Aufgabe: Zu finden, wieviel Grade ein gegebener Bogen betrage.

Auflösung. Der gegebene Bogen sey ABC Tab. VII Fig. 5. Ziehet die Sehne AC. Halbiret AC in D durch die senkrechte Linie BD. Suchet mit Hülfe der Lin. arithm. zu BD, DC die dritte Proportionallinie DF, II Abschn. §. 22. Folglich ist BD+DF=BF dem Durchmesser. Halbiret BF in E: so ist BE=EF dem Halbmesser. Stellet diesen auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60, und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl die Sehne AC treffe.

Wenn AC vom Durchmesser wenig unterschieden wäre, mithin die Zahl der Grade sich nicht genau angeben ließe: so versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl die Sehne des halben Bogens AB=BC überzwerch treffe.

Hier giebt es 3 Fälle. 1) Ist die Höhe des Abschnitts BD kleiner, als dessen halbe Sehne DC: so ist der Bogen ABC kleiner, als der halbe Umkreis. 2) Ist die Höhe BE der halben Sehne EH gleich: so ist der Bogen GBH dem halben Umkreis gleich. 3) Ist die Höhe DF größer, als die halbe Sehne DC: so ist der Bogen AFC größer, als der halbe Umkreis. Es sey BD=1 F. AC=5 F. so ist BD:DC=DC:DF, also $1:2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}:6\frac{1}{4}$, und BD+DF=BF, $1+6\frac{1}{4}=7\frac{1}{4}$; die Hälfte $BE=3\frac{5}{8}$. Folglich $BE:AC=3\frac{5}{8}:5=\frac{29}{8}:5=29:40$. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 29 Theile, stellet diese auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60, und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl die auf der Lin. arithm. gerade genommene Länge von 40 Theilen treffe. Diese ist etwas weniges über 87: folglich ist ohngefehr Arc ABC=87°.

§. 9. 6 Aufgabe: Einen Winkel zu zeichnen, der eine gegebene Anzahl Grade habe.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 6 ein Winkel von 32° zu zeichnen. Beschreibet mit einem beliebigen Halbmesser IK einen Bogen. Stellet diesen auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 60, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 32. Traget diese

aus

aus K in L, und ziehet IL: so hat der Winkel LIK 32°. Auf diese Art werden Bogen von einer gegebenen Anzahl Grade gezeichnet, der Halbmesser mag gegeben seyn, oder beliebig angenommen werden.

§. 10. 7 Aufgabe: Den Proportionalzirkel nach einem rechten Winkel zu öffnen.

Auflösung. Im II Abschn. §. 18 ist gewiesen worden, wie der Pr. Z. so weit zu öffnen sey, daß beyde Lineae arithm. einen rechten Winkel machen. Hier soll, wie daselbst angezeigt worden, gewiesen werden, wie weit er zu öffnen sey, daß er einen Winkelhaken vorstelle. Suchet erstlich die Größe des vom Künstler willführlich angenommenen Winkels, welchen bey geschlossenem Pr. Z. beyde Lin. Chord. machen. Nehmet nämlich überzwerch die Weite zwischen 60 und stellet diese auf der einen Lin. Chord. gerade. Diese gebe gedachten Winkel von 8°. Da also die Summe dieses Winkels und eines rechten, hier von 98° dem Winkel gleich sind, den beyde Lin. Chord. einschließen, wenn aus dem Pr. Z. ein Winkelhaken werden soll: so nehmet auf der einen Lin. Chord. die Sehne von 98° gerade und stellet sie, verglichen mit Tab. VII Fig. 30, zwischen 60 oder deren doppelte Länge zwischen den Endpuncten beyder Lin. Chord. A, B überzwerch.

§. 11. 8 Aufgabe: Zu einer gegebenen Sehne, mit der Anzahl der Grade ihres Bogens, den Halbmesser des zugehörigen Kreises zu finden und den Bogen selbst zu ziehen.

Auflösung. Es sey Tab. VII Fig. 7 MN die Sehne von 70°. Stellet MN auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 70 und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 60. Mit der ihr gleichen MO oder NO machet aus M und N den Durchschnittspunct in O: so ist MO=NO der gesuchte Halbmesser des Bogens MN.

§. 12. 9 Aufgabe: Ueber einer gegebenen Seite eine ordentliche Figur zu beschreiben.

Auflösung. Da um jede ordentliche Figur ein Kreis beschrieben werden kann: so ist jede ihrer Seiten die Sehne eines Bogens, welcher das Maaß des Centriwinkels der Figur ist. Stellet also überhaupt die gegebene Seite auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen die Zahl der Grade des Centriwinkels, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 60°: so ist diese der Halbmesser des Kreises, in welchem sich die gegebene Seite herumtragen läßt. Die Fig. 8 Tab. VII zeiget die Zeichnung des 5Ecks aus der gegebenen Seite PQ, welche die Sehne von 72° eines Kreises ist, der zu seinem Halbmesser PR=QR hat.

§. 13. 10 Aufgabe: Die Länge des Sinus, der Tangente und Secante eines gegebenen Winkels zu finden.

Auflösung. I. Des Sinus. Es sey Tab. VII. Fig. 9 der Winkel VST von 45° gegeben. Nehmet auf der einen Lin. Chord. gerade Chord 45°, und stellet sie über-

zwerch auf der Lin. arithm. zwischen 100. Unverrückt lasset den einen Fuß des Handzirkels in dem Punct 100 der einen Lin. arithm. stehen, und drücket den andern Fuß so weit zu, bis seine Spitze im Drehen nur die andere Lin. arithm. berühret. Stellet diese Weite gerade auf der Lin. arithm. so hat der Sin 45° etwas über 70 solcher Theile, deren der Halbmesser 100 hat. Ist der gegebene Winkel ein stumpfer, wie ∠SV z. E. von 135°: so suchet, wie vorher, den Sinus seines Ergänzungswinkels von 45°. Denn zwey Bogen, welche dem ganzen Umkreis gleich sind, haben einerley Sehne; folglich ihre Hälften, als die sogenannte Maaße zweyer Nebenwinkel, auch einerley Sinus.

II. Der Tangente WT. Suchet auf vorige Art den Cosinus des gegebenen Winkels, und zu dessen Cos. Sin. und Sin. tot. die vierte Proportionallinie II Abschn. §. 24. Für 45° ist die Tangente dem sin. tot. gleich.

Die Tangente eines stumpfen Winkels ist der Tangente desjenigen spitzigen Winkels gleich, um welchen der stumpfe Winkel größer, als ein rechter ist. So ist z. E. tan 118° = tan 28°.

III. Der Secante SW. Eröffnet beyde Lin. arith. nach einem rechten Winkel, II Abschn. §. 18, oder nachher §. 15 A. I. 1. Nehmet schief die Weite zwischen den Zahlen, welche der Länge des Sin. tot. und der Tangente zukommen. Beyde sind 100 für einen Winkel von 45°. Stellet diese Weite gerade auf die Lin. arithm. so sind es 141 Theile und in diesem Falle Chord 90° selbst. Die Secante eines stumpfen Winkels ist ebenfalls die Secante desjenigen spitzigen Winkels, um welchen der stumpfe größer, als ein rechter ist. Es ist z. E. Sec. 118° = sec 28°.

§. 14. Anmerkung vom Queersinus.

Ohnerachtet diese Materie eigentlich nicht hieher gehöret: so wird sie deswegen nicht übergangen, weil beym Scheffelt in der Bestimmung des Queersinus eines stumpfen Winkels sich einige Unrichtigkeit eingeschlichen hat. Man setze Tab. VII Fig. 10, daß sich der Halbmesser AB um B herumdrehe: so ist AI = sin vers AC, AK = sin vers ACD ꝛc. folglich ist sin vers 0° = 0, und es wachsen die Queersinus, bis sin vers ACDE = sin vers 90° = AB = sin tot wird. Nun ist z. E. Cos des Winkels ABF = BL, folglich sin vers ABF = BH - BL = LH, aber nicht AL. Hierauf wird sin vers ABG = MH, nicht AM. Folglich nehmen die Queersinus von 90° - 180° ab, und es wird sin vers 180° = 0. Denn der Queersinus ist nichts anders, als der Unterschied zwischen dem Cosinus eines Winkels und dem Sinus totus. Wenn also die Cosinus abnehmen, so wachsen die Queersinus; und wenn die Cosinus wachsen, so nehmen die Queersinus ab. Jenes geschiehet im ersten Quadranten, dieses in dem andern.

§. 15. Auflösung aller geradelinichten Dreyecke vermittelst des Proportionalzirkels.

A. **Der rechtwinklichten.** Der rechte Winkel ist allemal gegeben, beyde übrige Winkel aber sind spitzig. Einer davon giebt den andern, als seinen Ergänzungswinkel. Demnach hat man nach der Verhältnis der Seiten

I. **Gleichschenklichte.** Nur beyde Seiten um den rechten Winkel können einander gleich seyn. Jeder spitziger Winkel hat 45°. Also sind 2 Fälle.

1) **Gegeben:** Hypotenuse. **Gesucht:** Seite. Tab. VII Fig. 11.

Nehmet auf der Lin. Chord. gerade Chord 90°, stellet diese auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100: so sind beyde Lin. arithm. nach einem rechten Winkel geöffnet, weil Chord 60° als der Halbmesser 100 Theile der Lin. arithm. hat. Es sey die Hypotenuse BC = 63′. Nehmet gerade auf der Lin. arithm. 63 Theile und unverrückt versuchet, zwischen welche Zahl sich diese Weite überzwerch stellen lasse. Diese ist 44°½. Folglich ist AB = AC = 44′½. Nach dem Pythag. Lehrsatz ist $AB = \sqrt{\tfrac{1}{2} BCq}$.

2) **Gegeben:** Seite. **Gesucht:** Hypotenuse. Tab. VII Fig. 12.

Oeffnet, wie vorher, beyde Lin. arithm. nach einem rechten Winkel. Eine Seite AB = AC sey 51′. Nehmet unverrückt überzwerch die Weite zwischen 51: so giebt diese auf ihr gerade gestellt 72. Folglich ist BC = 72′. Nach dem Pythag. Lehrsatz ist $BC = \sqrt{2 ABq}$.

II. **Ungleichseitige.** Ein spitziger Winkel von beyden heiße *Winkel*, und eine Seite von beyden um den rechten Winkel heiße Seite. Beyde Seiten geben die Hypotenuse, und die Hypotenuse nebst einer Seite geben die andere Seite, vermöge des Pythagor. Lehrsatzes. Da also nur noch die Winkel in Betrachtung kommen: so giebt es 5 Fälle.

1) **Gegeben:** Hypotenuse, Seite. **Gesucht:** Winkel. Tab. VII. Fig. 13.

Es sey BC = 75′, AC = 60′. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 60 Theile, und stellet solche überzwerch zwischen 100. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 75 überzwerch: so hat diese gerade gestellt 44¾ Theile. Nehmet gerade 2 × 44¾ = 89½ Theile und stellet diese gerade auf der Lin. Chord. so ist diese die Sehne des Winkels B von 53° ziemlich genau. Demnach C = 37°.

2) **Gegeben:** Hypotenuse, Winkel. **Gesucht:** Seite. Tab VII Fig. 14.

Es sey BC = 75′, B = 53°. Folglich C = 37°. Nehmet auf der Lin. Chord. gerade Chord 37°, und stellet diese auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100. Nehmet auf ihr gerade 75 Theile, stellet den einen Fuß des Handzirkels in 75 und unverrückt sehet, wohin dessen andrer Fuß treffe. Da dieses in 120 geschiehet: so ist 120 die doppelte Länge der dem Winkel B gegen über liegenden Seite AC, und es ist AC = 60′. Eben so stellet Chord 53° überzwerch zwischen 100; und es ergiebt sich AB = 45′.

3) Gegeben: Seite, Winkel. Gesucht: Hypotenuse. Tab. VII Fig. 15.

Es sey AC=60′, B=53°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 60 Theile, und stellet diese überzwerch zwischen 100. Nehmet auf der Lin. Chord. gerade Chord 53° und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie sich auf der Lin. arithm. überzwerch stellen lasse. Diese ist 150. Die Hälfte 75 ist die Länge der Hypotenuse BC.

4) Gegeben: Seite, Winkel. Gesucht: Seite. Tab. VII Fig. 16.

Es sey AC=60′, B=53°. Folglich C=37°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 60 Theile und stellet diese auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen 2×53=106. Nehmet unverrückt überzwerch die Weite zwischen 2×37=74: so giebt diese auf der Lin. arithm. gerade gestellt 45 Theile. Folglich ist AB=45′.

5) Gegeben: Beyde Seiten. Gesucht: Winkel.

Oeffnet beyde Lin. arithm. nach einem rechten Winkel. Stellet den einen Fuß des Handzirkels auf der einen Linie in 45 und den andern auf der andern Linie in 60: so hat diese Weite gerade gestellt 75 Theile, und ist die Länge der Hypotenuse BC. Suchet, wie vorher N. 1, aus der Hypotenuse und der einen Seite die Winkel.

B. Der schiefwinklichten.

I. Im gleichseitigen giebet eine Seite alles. Denn jeder Winkel hat 60°.

II. Im gleichschenklichten wird durch die senkrechte Linie, welche von der Spitze des Winkels, dem die Grundlinie gegen über lieget, auf sie gefällt wird, sowohl die Grundlinie, als auch dieser Winkel halbiret. Winkel bedeutet einen von beyden an der Grundlinie, welcher die Hälfte des dritten giebt, dem die halbe Grundlinie gegen über lieget; so wie dieser einen von jenen beyden giebt. Seite bedeute eine von beyden gleichen Seiten. Folglich beruhet alles auf der Auflösung eines rechtwinklichten Dreyecks, und es giebt hier 3 Fälle

1) Gegeben: Seite, halbe Grundlinie. Gesucht: Winkel. Tab. VII Fig. 18. Verfahret nach A. II. 1.

2) Gegeben: Seite, Winkel. Gesucht: Halbe Grundlinie. Tab. VII Fig. 19. Verfahret nach A. II. 2.

3) Gegeben: Halbe Grundlinie, Winkel. Gesucht: Seite. Tab. VII Fig. 20. Verfahret nach A. II. 3.

III. Im ungleichseitigen sind 5 Fälle zu unterscheiden.

1) Gegeben: Zwey Winkel und eine anliegende Seite. Gesucht: die übrigen Seiten. Tab. VII Fig. 21.

Es sey AB=50′, A=45°, C=30°. Folglich B=105°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 50 Theile und stellet diese Länge auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen Chord

Chord 2 × 30° = Chord 60°. Nehmet unverrückt die Weite zwischen Chord 2 × 45° = Chord 90° überzwerch und stellet sie auf der Lin. arithm. gerade: so sind dieses 70½ Theile. Folglich BC = 70′½. Da nun sin 105° = sin 75° und Chord 2 × 75° = Chord 150°: so nehmet noch unverrückt und überzwerch die Weite zwischen Chord 150° und stellet sie auf der Lin. arithm. gerade: so sind dieses beynahe 97 Theile. Folglich ist AC = 97′.

2) Gegeben: Zwey Winkel und die dazwischen liegende Seite. Gesucht: Die übrige Seiten. Tab. VII Fig. 22.

Es sey AC = 40′, A = 50°, C = 42°. Folglich B = 88°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 40 Theile und stellet diese Länge auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen Chord 2 × 88° = Chord 176°. Nehmet unverrückt die Weite zwischen Chord 2 × 50° = Chord 100° überzwerch, und stellet sie auf der Lin. arithm. gerade: so sind dieses 31 Theile, und es ist BC = 31′. Eben so erhaltet ihr aus der Chord 2 × 44° = Chord 88° die Seite AB = 27′.

3) Gegeben: Zwey Seiten und ein an der einen Seite anliegender Winkel. Gesucht: Die übrige Winkel. Tab. VII. Fig. 23. 24. 25. Hier sind nämlich dreyerley Fälle wegen dem einen gesuchten Winkel, welcher an der andern Seite lieget zu unterscheiden.

Erster Fall. Wenn die Seite, an welcher der gesuchte Winkel anlieget, größer ist, als die Seite, an welcher der gegebene Winkel anlieget: so ist der gesuchte Winkel spitzig. Man siehet Tab. VII Fig. 23, daß der aus B mit BC beschriebene Bogen den andern Schenkel des gegebenen Winkels A nur in einem Puncte C durchschneiden kann.

Es sey AB = 34′, BC = 44′, A = 62°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 44 Theile und stellet sie auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen Chord 2 × 62° = Chord 124°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 34 Theile, und versuchet unverrückt, zwischen welchen Punct der Lin. Chord. sich diese Länge überzwerch stellen lasse. Dieser ist 86. Folglich ist BCA = $\frac{86°}{2}$ = 43°, und also B = 73°.

Zweyter Fall. Wenn die Seite, an welcher der gesuchte Winkel lieget, kleiner ist, als die Seite, an welcher der gegebene Winkel lieget. Hier giebt es zwey besondere Fälle. Einer ist Tab. VII Fig. 24, wo der aus B mit BC beschriebene Bogen den andern Schenkel des gegebenen Winkels A nur in einem Puncte C berühret; für welchen der gesuchte Winkel ein rechter ist. Es sey AB = 34′, BC = 30′, A = 62°. Nehmet eben so auf der Lin. arithm. gerade 30 Theile und stellet sie auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen Chord 2 × 62° = Chord 124°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 34 Theile, und versuchet unverrückt, zwischen welchen Punct der Lin. Chord. sich diese Länge überzwerch stellen lasse. Dieser ist 180. Folglich ist BCA = $\frac{180°}{2}$ = 90°.

Dritter

Dritter Fall, ein besonderer Fall des zweyten, wo es völlig ungewiß ist, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf sey. Dieser ist es, wenn Tab. VII Fig. 25 der aus B mit BC beschriebene Bogen den andern Schenkel des gegebenen Winkels in zwey Punkten C durchschneidet, und es völlig ungewiß ist, ob der gesuchte Winkel ACB spitzig oder stumpf sey; welcher Umstand in jedem einzeln Falle gegeben seyn muß.

Es sey AB=34', BC=33', A=62°. Auch hier nehmet auf der Lin. arithm. 33 Theile und stellet sie auf der Lin. Chord. überzwerch zwischen Chord 124°. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 34 Theile und versuchet unverrückt, zwischen welchen Punct der Lin. Chord. sich diese Länge überzwerch stellen lasse. Dieser ist 130. Folglich ist $BCA = \frac{130°}{2} = 65°$. Es kann aber auch BCA=115° seyn, weil Chord 130°=Chord 230° ist. Hier lehret die Mathematik, was nothwendig ungewiß sey.

4) **Gegeben**: Zwey Seiten und der eingeschloßne Winkel. **Gesucht**: Die übrige Winkel. Tab. VII. Fig. 26.

Es sey AC=100', BC=90', C=48°. Nehmet gerade auf der Lin. Chord. die Chord 48° und stellet sie auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100: so machen beyde Lin. arithm. einen Winkel von 48°. Unverrückt nehmet schief die Weite zwischen 90 und 100: so sind dieses gerade gestellt 78 Theile. Mithin ist AB=78'. Hieraus ergeben sich nach N. 3, 1. 2 Fall die Winkel B, A ohne alle Zweydeutigkeit.

5) **Gegeben**: Alle Seiten. **Gesucht**: Alle Winkel. Tab. VII. Fig. 27.

Es sey AB=50', BC=120', CA=130'. Nehmet auf der Lin. arithm. gerade 130 Theile und stellet diese Länge schief zwischen 50 und 120. Folglich sind beyde Lin. arithm. unter dem Winkel ABC geöffnet. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 100 überzwerch: so trifft diese auf der Lin. Chord. gerade gestellt in 90. Folglich ist ABC=90°. Nehmet auf der Lin. arithm. 120 gerade, und stellet solche Länge schief zwischen 50 und 130: so sind beyde Lin. arithm. unter dem Winkel BAC geöffnet. Nehmet unverrückt die Weite zwischen 100 überzwerch: so trifft diese auf der Lin. Chord. gerade gestellt in 68. Folglich ist CAB=68°. Mithin ACB=22°.

§. 16. Anmerkung über die trigonometrische Berechnung der Aufgabe: Aus allen drey Seiten die Winkel zu finden.

Da die Anweisung zur trigonometrischen Berechnung aller vorstehenden Aufgaben nicht hieher gehöret: so verdienet nur in Ansehung der angezeigten folgendes angemerkt zu werden. Man kann nämlich überhaupt setzen: *Wie die eine Seite zur Summe der übrigen beyden Seiten, so deren Differenz zu einer vierten Linie.* Und da giebt es folgende Fälle. 1) Wenn das erste Glied die größte Seite ist, so ist allemal das letzte Glied kleiner.

2) Wenn

2) Wenn das erste Glied die mittlere oder kleinste Seite ist: so ist zugleich a) wenn das letzte Glied dem ersten gleich ist, das Dreyeck rechtwinklicht; b) wenn das letzte Glied kleiner, als das erste ist, das Dreyeck spitzwinklicht; und c) wenn das letzte Glied größer, als das erste ist, das Dreyeck stumpfwinklicht. Für den Fall 2) a) werden die Winkel nach §. 15. II. 1. 5. gefunden. Für die übrigen Fälle 1) und 2) b) c) suche man die halbe Summe und die halbe Differenz beyder äußersten Glieder u. s. w. Die Beweise aller dieser Regeln beruhen auf Euclid. III. B. 35. 36. S.

§. 17. Anwendung der Auflösung der Dreyecke beym Höhenmessen.

Gesetzt, man habe, um Tab. VII. Fig. 28 die Höhe z. E. eines Thurms BC zu finden, eine Standlinie $AD=75'$ gemessen, und die Winkel $BAD=50°$, $BDC=65°\frac{1}{2}$ gefunden. Folglich ist $BDA=114°\frac{1}{2}$. Wenn man also mit Hülfe des Pr. Z. die Höhe vorläufig finden will: so suche man

1) Im Dreyeck ABD die Seite BD, §. 15. III. 2. Es ist W. $BAD=50°$, W. $BDA=114°\frac{1}{2}$, folglich W. $ABD=15°\frac{1}{2}$, und $AD=75'$. Stellet Chord $2\times15°\frac{1}{2}$ = Chord 31° auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 75, oder zwischen $\frac{75}{2}=37\frac{1}{2}$, weil sich Chord $2\times50°$ = Chord 100° bey unverrücktem Pr. Z. nicht mehr überzwerch stellen läßt. Nehmet unverrückt Chord 100° und versuchet, zwischen welche Zahl der Lin. arithm. sie sich überzwerch stellen lasse. Diese ist $107\frac{1}{2}$. Folglich ist $BD=2\times107\frac{1}{2}=215$ F.

2) Im rechtwinklichten Dreyeck BCD aus $BD=215$ F. W. $BDC=65°\frac{1}{2}$, die Seite BC, §. 15. II. 2. Es ist also W. $DBC=90°-65°\frac{1}{2}=24°\frac{1}{2}$.

Stellet Chord $24°\frac{1}{2}$ auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 100. Nehmet auf ihr gerade $\frac{215}{2}=107\frac{1}{2}$ Theile. Stellet unverrückt den einen Fuß des Handzirkels in $107\frac{1}{2}$: so trifft der andere in 196. Folglich ist die Höhe $BD=196$ F.

§. 18. II Aufgabe: Die Weite des Wurfs aus einem Mörser zu finden.

Auflösung. Nach der parabolischen Theorie ist 1) die größte Weite des Wurfs unter einem Erhöhungswinkel von 45°. 2) Jedes Paar Erhöhungswinkel, die zusammen 90° betragen, geben einerley Weite des Wurfs. 3) Die Weiten des Wurfs verhalten sich, wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel. Es sey also Tab. VII Fig. 29, AB die größte Weite des Wurfs für den Erhöhungswinkel von 45° in 100 Theilen gegeben: man suchet sie, bey einerley Caliber und Ladung, für den Erhöhungswinkel DAB von 30°, oder EAB von 60°. Weil sich nun die einfachen Sinus der doppelten Erhöhungswinkel, wie die doppelten Sinus, d. i. wie die Sehnen der doppelten Erhöhungswinkel, verhalten: so nehmet die ganze Lin. Chord. als die Sehne des doppelten rechten Winkels, und stellet sie zwischen 200 auf der Lin. arithm. überzwerch, weil, wenn man sie zwischen 100 stellen wollte, die Winkel beyder halben Lin. arithm. mit dieser Sehne allzuspitzig würden. Nehmet 2 Sin $2\times30°$ = 2 sin 60° =

Chord 120° und unverrückt versuchet, zwischen welche Zahl auf der Lin. arithm. sie sich überzwerch stellen lasse. Diese ist 173. Folglich ist die Weite des Wurfs $\frac{173}{2} = 86\frac{1}{2}$ solcher Theile, deren die größte 100 hat. Für den Erhöhungswinkel von 60° ist $2 \sin 2 \times 60° = 2 \sin 120° =$ Chord 240° auch Chord 120°.

Ein anderer Fall. Wenn, alles übrige gleich gesetzt, unter einem Erhöhungswinkel von 21° die Weite des Wurfs 400 R. beträgt: wie groß wird sie unter einem Winkel von 30° seyn? Stellet $2 \times \sin 2 \times 21° =$ Chord 84° auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen $\frac{400}{4} = 100$. Nehmet gerade $2 \times \sin 2 \times 30° =$ Chord 120° und unverrückt versuchet, zwischen welcher Zahl auf der Lin. arithm. sie sich überzwerch stellen lasse. Diese ist $179\frac{1}{2}$. Folglich ist die Weite des Wurfs $4 \times 179\frac{1}{2} = 518$ R.

§. 19. 12 Aufgabe: Umgekehrt aus der gegebenen Weite des Wurfs den Erhöhungswinkel zu finden.

Auflösung. Wenn, alles übrige gleich gesetzt, die Weite des Wurfs 400 R. unter einem Erhöhungswinkel von 21° beträgt: wie groß muß der Erhöhungswinkel seyn, wenn 520 R. weit geworfen werden soll? Nehmet $2 \sin 2 \times 21° =$ Chord 84° und stellet solche auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen $\frac{400}{4} = 100$. Unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen $\frac{520}{4} = 130$: und stellet sie auf der Lin. Chord. gerade: so ist sie Chord 121°. Demnach der Erhöhungswinkel $\frac{121°}{4} = 30°\frac{1}{4}$.

§. 20. Anmerkung.

Von der Parabolischen Theorie von der Bahn der Kugeln und Bomben &c. findet man das vornehmste in Struensees Anfangsgr. der Artillerie. Ihre Geschichte und Verbesserungen, nebst der vollständigsten Anzeige der dahin gehörigen Schriften durch die rühmlichste Bemühung des Hrn. Prof. Geuß in Kopenhagen, stehet in des Hrn. Geh. R. Böhms Magazin für Ingenieurs und Artilleristen. Man hat, wie schon im I Abschn. §. 9 angezeit worden, besondere Prop. Zirkel, auf welchen die eine Linie heißt: Mortarium dirigens. Ich habe einen solchen bey der Hand, dessen Abtheilungen zwar nur auf 45-90° gehörig gehen, aber darinnen, wenn diese den Schußweiten proportionirt seyn sollten, nicht mit der parabolischen Theorie übereinkommen, nach welcher die Schußweite von 75° die Hälfte der von 45° seyn muß.



XI. Von der Linea Circuli diuidendi.

Tafel für die Eintheilung der Lineae Circuli diuidendi.

Zahl der Theile.	Länge der Sehnen.	Zahl der Theile.	Länge der Sehnen.
3.	10000.	17.	2120.
4.	8165.	18.	2005.
5.	6788.	19.	1900.
6.	5774.	20.	1806.
7.	5009.	21.	1719.
8.	4419.	22.	1642.
9.	3949.	23.	1572.
10.	3568.	24.	1507.
11.	3252.	25.	1443.
12.	2988.	26.	1392.
13.	2762.	27.	1341.
14.	2568.	28.	1292.
15.	2401.	29.	1247.
16.	2253.	30.	1207.

§. 1. Erklärung und Gebrauch.

Diese Linie dienet zur Eintheilung des Umkreises in gleiche Theile, folglich vornehmlich zur Beschreibung ordentlicher Figuren in einem gegebenen Kreise.

§. 2. Eintheilung.

Es lassen sich allerdings ordentliche Figuren vermittelst der Lineae Chordarum in einem gegebenen Kreise beschreiben X Abschn. §. 6; man müßte aber darauf die Sehnen für das 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 29 ꝛc. Eck noch besonders angeben. Weil aber für diese Figuren und die übrigen, für das 3, 4, 5, 6, 8 ꝛc. Eck die Seitenzahlen bey 120, 90, 72, 60, 45 ꝛc. beygesetzt werden müßten, als III zu 120, IV zu 90 ꝛc. so hat man lieber, vermuthlich, um die Verwirrung so vieler Zahlen bey einerley Linie zu verhüten, die ganze Lin. arithm. oder die Fundamentallinie, als eine besondere Linie, zur Sehne von 120° oder Seite des Dreyecks gemacht, und daraus die Seiten der übrigen ordentlichen Figuren aus den Sinustafeln also berechnet:

Zahl der Theile.	Bogen.	½ Bogen.	Sinus ½ Bog.	Länge der Sehnen.
3	120°.0'.0"	60.° 0'.0"	8660	10000
4	90. 0. 0	54. 0. 0	7071	8165
5	72. 0. 0	36. 0. 0	5878	6788
6	60. 0. c	30. c. 0	5000	5774
7	51.25.42	25.42.51	4338	5009 u. s. w.

Weil nämlich die Seiten der ordentlichen Vielecke, die in einerley Kreis beschrieben werden, sich wie die Sinus der halben Bogen verhalten: so ist z. E. 8660 : 10000 = 7071 : Seite des Vierecks.

$$\begin{array}{rl} \log\ 10000 = & 4,0000000 \\ -\ \log\ 8660 = & \underline{3,9375179} \\ \log\ \text{const} & 0,0624821 \\ +\ \log\ 7071 = & \underline{3,8494808} \\ & 3,9119629 \end{array}$$

Sehne von 90° oder Seite des Vierecks 8165.

Demnach ergeben sich die Sehnen oder Seiten durch fortgesetzte Addition des Logarithmen des Sinus des halben Bogens zu dem gefundenen log (10000 : 8660). Z. E.

$$\begin{array}{rl} \log\ 5878 = & 3,7692296 \\ \log\ \text{const} & \underline{0,0624821} \\ & 3,8317117 \end{array}$$

Sehne von 72° oder Seite des Fünfecks 6788.

Auf diese Art ist die ganze Tafel aufs neue berechnet worden.

§. 3. 1 Aufgabe: Einen gegebenen Umkreis in gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es soll Tab. VIII Fig. 1 der Umkreis, dessen Halbmesser AB ist, in 7 gleiche Theile getheilt werden. Stellet den Halbmesser AB als die Seite des Sechsecks auf der Lin. Circ. diuid. überzwerch zwischen 6: und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 7: so läßt sich diese 7mal in dem gegebenen Umkreise herumtragen.

§. 4. Zusatz.

Folglich wird auf diese Art ein ordentliches Vieleck sehr leicht in einem gegebenen Kreise beschrieben, wie Fig. 2 zeiget. Auch kann man durch die Rechnung aus der gegebenen Länge des Durchmessers die Seite eines ordentlichen Vielecks finden. Es sey AB = 3". Demnach für die Seite des Siebenecks: 5774 : 5009 = 3" : 2"6'"0^{IV}2^{V}.

§. 5.

§. 5. 2 Aufgabe: Zu der gegebenen Seite einer ordentlichen Figur den Halbmesser des Kreises zu finden, in welchem sich die Figur beschreiben läßt.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 3 die Seite des ordentlichen Fünfecks CD gegeben. Stellet diese Seite auf der Lin. Circ. diuid. überzwerch zwischen 5, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 6. Beschreibet mit dieser Weite aus C, D zwey Bogen, die einander in E durchschneiden: so ist E der Mittelpunct des Kreises, in welchem sich CD 5mal herumtragen läßt.

§. 6. 3 Aufgabe: Zu finden, der wievielte Theil des Umkreises ein gegebner Bogen sey.

Auflösung. Der gegebene Bogen sey FHG Tab. VIII Fig. 4. Halbiret dessen Sehne in FG in I durch die senkrechte Linie HI. Suchet zu HI, IG die dritte Proportionallinie IK, II Abschn. §. 22. Halbiret HK in L: so ist HL = LK die Seite des Sechsecks. Stellet den Halbmesser auf der Lin. Circ. diuid. überzwerch zwischen 6, und unverrückt versuchet, zwischen welche Zahl sich FG überzwerch stellen lassen. Ist diese 5: so ist Arc FHG = $\frac{1}{5}$ des Umkreises. S. X Abschn. §. 8.

§. 7. Wie ein Rad von gegebner Höhe auszutheilen sey.

Es sey Tab. VIII Fig. 5 das Rad 7 Schuh hoch, welches 64 Kämme bekommen soll. Man fragt, wie breit jeder Kamm kommen werde. Stellet die halbe Höhe $3\frac{1}{2}$ Schuh auf der Lin. Circ. diuid. zwischen 6 überzwerch, und unverrückt nehmet die Weiten zwischen 4, 8, 16, welche ihr herumtraget: so ist der Umkreis in 4, 8, 16 Theile getheilt. Die Figur zeiget das eine Viertel des Rades. Halbiret jedes 16theil: so erhaltet ihr 32 Theile. Halbiret jedes 32theil: so erhaltet ihr die begehrten 64 Theile. Um nun die Sehne von $\frac{1}{64}$ des Umkreises zu finden: so hat nach dem gewöhnlichen 12theilichtem Maaß 1 Schuh * 12 Zolle, oder 144 Scrupel. Stellet 1 Sch. auf der Lin. arithm. überzwerch zwischen 144. Nehmet die Sehne von $\frac{1}{64}$ des Umkreises und versuchet unverrückt, zwischen welche Zahl sie überzwerch treffe. Diese ist $49\frac{1}{2}$. Folglich ist die Breite eines Kammes 4 Z. $1\frac{1}{2}$ Scrup. oder $4\frac{1}{8}$ Zoll.

* Dieses ist Scheffelts Vorschrift. Weil aber die Länge von 1 Sch. sich nur bey einem sehr großen Pr. Z. überzwerch zwischen 144 auf der Lin. arithm. stellen läßt: so ist es besser, wenn man die Sehne von $\frac{360^\circ}{64} = 5^\circ 28' 7^\circ\frac{1}{2}$ oder 2 sin $2^\circ 44'$ suchet, welches hier hinlänglich ist. Nun ist für sin tot = 10000, sin $2^\circ 44' = 477$, folglich Chord $5^\circ 28' = 954$. Demnach $10000 : 954 = 3\frac{1}{2}$ Sch. das sind 504 Scr. zu 48 Scr. oder genau 4 Z.



XII. Von der Linea Rectae diuidendae.

Tafel für die Eintheilung dieser Linie.					
Punct.	Theile.	Punct.	Theile.	Punct.	Theile.
1.	10000	5.	2000	10.	1000
Med. ac Extr.	6180	6.	1666	11.	909
2.	5000	7.	1429	12.	833
3.	3333	8.	1250	Diam.	3184
4.	2500	9.	1111		

§. 1. Erklärung und Gebrauch dieser Linie.

Diese Linie dienet, eine gegebene gerade Linie, die man zwischen ihre Endpuncte überzwerch stellen kann, in 2-12 gleiche Theile zu theilen, ohne erst das Einmaleins zu Hülfe nehmen zu dürfen, wie beym Gebrauch der Lin. arithm. zu dieser Absicht geschehen muß, II Abschn. §. 8. Ferner nimmt man die Eintheilung einer gegebenen geraden Linie nach der sogenannten äußern und mitleren Verhältnis mit, von welcher zwar schon im VII Abschn. §. 2 einiges vorgekommen, hier aber besonders zu erklären, und wie mancherley Nutzen sie habe, zu zeigen seyn wird. Auch wird die Erfindung des Durchmessers zu einem gegebenen Umkreise hier mitgenommen. Mithin bedeutet auf dem Pr. Z. 1) Lineae Rectae diuiden. so viel als: Linea Rectae Linae diuidendae in Partes aequales; 2) Extrema ac med. rat. secan. so viel, als: Linea Rectae Lineae extrema ac media Ratione secandae.

§. 2. Eintheilung.

I. Die ganze Linie ist der Fundamentallinie gleich von 10000 Theilen, oder von 2000 Theilen, wenn man den 2000theilichten Maaßstab nehmen will. Folglich kommen von 2000 Theilen auf $\frac{1}{2}$ . . . 1000, $\frac{1}{3}$ . . . . 666, $\frac{1}{4}$ . . . 5000 Theile u. s. w. Wo also 2 stehet, da ist vom Mittelpunct an gerechnet, $\frac{1}{2}$; wo 3 stehet, $\frac{1}{3}$ der ganzen Linie u. s. w.

II. Zwischen 3 und 4 stehet ein Punct, auf welchen sich das beygesetzte Wort Diam. beziehet. Weil nämlich überhaupt Periph : Diam = 314 : 100 so ist, wenn man den Umkreis zu einer geraden Linie macht, welche 200 Theile hat, 314 : 100 = 2000 : Diam. Demnach

$$\begin{array}{rl} \log 200000 = & 5,3010300 \\ \log 314 = & \underline{2,4969296} \\ \log \text{Diam.} & 2,8041004 \end{array}$$

Die Länge des Durchmessers also beträgt 637 Theile, auch vom Mittelpunct des Pr. Z. an gerechnet.

III. Nach

III. Nach dem Euclides VI B. 3 Erkl. heißt eine gerade Linie nach der äußern und mittlern Verhältnis getheilt, wenn sich die ganze Linie zu dem größern Stück, wie das größere Stück zum kleinern verhält. Es sey also Tab. VIII Fig. 4 für diesen Abschnitt, eine gerade Linie LM in N so getheilt, daß $LM:LN=LN:NM$ sich verhalte, und man setze $LM=a$, $LN=x$: so ist $NM=a-x$. Folglich $a:x=x:a-x$, mithin $a^2-ax=x^2$, $x^2+ax=a^2$. Demnach ist für diese unreine quadratische Gleichung $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2=\frac{5}{4}a^2$, $x+\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, und also $x=\frac{1}{2}a\sqrt{5}-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$; wo der doppelte Werth der Wurzel nicht erst in Erwägung kömmt. Auf dem Pr. Z. wird die ganze Fundamentallinie nach dieser Verhältnis getheilt. Mithin ist $a=2000$. Allein $\sqrt{5}=2,236$, $\sqrt{5}-1=1,236$. Folglich $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)=1000\times 1,236=1236$; und für die Tafel doppelt genommen 6180.

Nöthige Erinnerung. Es ist T. I Fig. 1 auf beyden Lin. Rect. div. der Punct für diese Theilung durch ein Versehn ausgelassen worden. Ein Besitzer dieser Schrift darf nur $123\frac{1}{2}$ Theile der Lin. arithm. oder 1236 Theile des 2000theilichten Maaßstabes nehmen und so aus dem Mittelpunct beyde Puncte auftragen. Am untern Endpuncte jeder dieser Linien muß 1 stehen.

§. 3. Anmerkung von der Sectione lineae iuxta extr. ac med. Rationem.

Wegen den vielen Vortheilen, welche diese Theilung einer geraden Linie in der Geometrie verschafft, nennen sie einige Sectionem, Proportionem diuinam, so gar Sapientiam Salomonis, und beehren sie mit folgenden Versen:

Si quid diuinum condebat pulchra Mathesis,
Quod geometra celat, haec tibi sola dabit.

Es gehöret hieher eine unter Dav. Bläsings Vorsitz gehaltene und lesenswerthe Disp. de Lineae iuxta Proportionem diuinam Sectione, Regiom. 1703.

§. 4. 1 Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie in eine begehrte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey Tab. VIII. Fig. 1 die Linie AB in 5 gleiche Theile zu theilen. Stellet sie überzwerch auf der Lin. Rect. div. zwischen 1, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 5: so ist diese $\frac{1}{5}$ AB. Mithin ist auch eine Linie AC gefunden, welche $\frac{1}{5}$ AB gleich ist.

§. 5. 2 Aufgabe: Zu finden, der wievielte Theil eine gegebene Linie von einer andern gegebenen Linie sey.

Auflösung. Die kleinere gegebene Linie sey DE Tab. VIII Fig. 2, die größere FG. Stellet FG auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen 1, und versuchet unverrückt, zwischen welchem

welchem Punct sich DE überzwerch stellen lasse. Ist dieser 3: so ist DE = $\frac{1}{3}$ FG. Trifft man nicht genau in einen Punct: so muß man sich der Lin. arithm. nach II Abschnitt §. 12 bedienen.

§. 6. 3 Aufgabe: Etliche Theile einer gegebenen geraden Linie zu finden.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 3 die Linie HI gegeben, man suchet $\frac{3}{4}$ von ihr. Stellet HI auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 4: so ist das ihr gleiche Stück KI = $\frac{1}{4}$ HI, folglich HK = $\frac{3}{4}$ HI.

§. 7. 4 Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie nach der äußern und mitlern Verhältnis zu theilen.

Auflösung. Stellet die Tab. VIII Fig. 4 gegebene Linie LM auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet die Weite zwischen dem Punct Extr. ac med. Rat. sec. Machet dieser Weite das größere Stücke LN gleich: so ist LM : LN = LN : NM.

§. 8. 3 Aufgaben von der Construction des ordentlichen Fünfecks.

I. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein gleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben, dessen Winkel an der Grundlinie der gedoppelte Winkel von dem sey, welchem sie gegen über lieget.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 5, AB gegeben. Verlängert AB in C. Suchet das größere Stück der Lin. extr. ac med. Rat. sec. §. 7. und machet BC diesem gleich. Beschreibet aus A und B mit AC das gleichschenklichte Dreyeck ADB, welches, vermöge Euclid. IV. B. 10 S. das begehrte ist.

II. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein ordentliches Fünfeck zu beschreiben.

Auflösung. Es sey in der vorigen Figur AB die gegebene Seite. Verlängert diese zu beyden Seiten. Suchet, wie vorher BC, und machet AG = BC. Auch beschreibet, wie vorher, das Dreyeck ADB. Machet mit AB aus G und A einen Durchschnitt in E, und aus B und C einen Durchschnitt in E. Ziehet AE, ED, BF, FD.

Oder: Wenn ihr das Dreyeck ADB beschrieben habt, so machet mit AB aus A und D den Durchschnitt in E, und aus B und D in F.

III. In einem gegebenen Kreise ein ordentliches Fünfeck zu beschreiben.

Auflösung. Beschreibet ein solches gleichschenklichtes Dreyeck, wie N. I gewiesen worden. Ziehet an den gegebenen Kreis Tab. VIII Fig. 6 eine Tangente HI und der Berührungspunct sey K. Machet die Winkel HKL = IKM = DAB = DBA: so ist die Sehne ML die Seite des Fünfecks. Halbiret die Bogen KNL in N, KON in O und ziehet KN, NL, KO, ON: so ist KNLMO ein ordentliches Fünfeck, Euclid. IV B. 11 S.

Oder:

Oder: Ziehet den Durchmesser. Errichtet aus dem Mittelpunct P das Loth PK. Schneidet mit Hülfe des Pr. 3. den einen Halbmesser nach der äußern und mitlern Verhältnis §. 7. in Q: so ist KP die Seite des Sechsecks, KQ die Seite des Fünfecks, QP die Seite des Zehnecks; Euclid. XIII B. 10 S. Es darf also nur KQ herumgetragen werden.

§. 9. 2 Aufgaben von der Construction des ordentlichen Zehnecks.

I. Ueber einer gegebenen Linie ein ordentliches Zehneck zu beschreiben.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 7, RS die gegebene Seite. Verlängert sie in T. Stellet RS auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet die Weite zwischen dem Punct Extr. ac med. Rat. sec. überzwerch. Machet ST dem größern Stücke gleich. Machet mit RT aus R und S den Durchschnitt V: so ist V der Mittelpunct des Kreises, in welchem RS sich 10mal herumtragen läßt.

II. In einem gegebenen Kreise ein ordentliches Zehneck zu beschreiben.

Auflösung. Diese ist mit der andern N. III §. 8 einerley, nach welcher Fig. 6 das Stück PQ die Seite des ordentlichen Zehnecks ist, welches also sich herumtragen läßt.

§. 10. 10 Aufgabe: Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Länge des Umfanges und umgekehrt zu finden.

Auflösung. I. Es sey Tab. VIII Fig. 8 der Durchmesser WX gegeben. Stellet ihn auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen den Punct, wo Diam. stehet und nehmet unverrückt die Weite zwischen 1 überzwerch: so ist die ihr gleiche YZ die Länge des Umfanges. II. Umgekehrt soll z. E. ein Kreis gezeichnet werden, der 60 F. im Umfange habe. Nehmet 60 Theile auf der Lin. arithm. gerade. Stellet diese auf der Lin. Rect. div. überzwerch zwischen 1, und unverrückt nehmet die Weite zwischen dem Punct, wo Diam. stehet. Stellet diese Weite gerade auf der Lin. arithm. so sind das 19,1 Theile. Folglich ist der gesuchte Durchmesser 19 F. 1 Z. lang.



XIII. Von der Linea Fortificatoria.

Tafel für die Eintheilung dieser Linie.					
Punct.	Theile.	Punct.	Theile.	Punct.	Theile.
1.	$517\frac{2}{3}$.	5.	4403.	9.	7567.
2.	$1035\frac{1}{3}$.	6.	5176.	10.	8375.
3.	$1552\frac{2}{3}$.	7.	5965.	11.	9190.
4.	3660 .	8.	6762.	12.	10000.

§. 1. Vorläufige Erinnerung.

Wenn in den vorigen Abschnitten keine erhebliche Aufgabe ausgelassen worden, die sich mit Hülfe des Prop. Zirkels auflösen läßt, vielmehr manches als eine Erweiterung des Scheffeltschen Unterrichts mitgenommen worden, wozu sich nahe Veranlassung gegeben hatte: so hat in diesem Abschnitte, ohnstreitig mit allem Recht, das Gegentheil statt finden können. Den da 1) die Eintheilung der Lineae fortificatoriae auf den Maximen der alten Holländischen Befestigungsart beruhet, deren Ungrund und Untauglichkeit Glaser in seinen vernünftigen Gedanken von der Kriegsbaukunst Cap. IV S. 35. 55 sehr vollständig erwiesen hat, und woran heut zu Tage kein Ingenieur zweifelt, auch 2) Scheffelt aus dem Goldmann die Zeichnung der Hauptrisse fast aller Arten von regulären und irregulären Festungen und Schanzen entlehnt und damit $1\frac{1}{2}$ Kupfertafeln vollgefüllt hat, die insgesammt nach eben diesen alten Maximen eingerichtet sind, nunmehr aber keinem Ingenieur etwas nützen können: so wird hoffentlich dem übrigen Werth des Scheffeltschen Unterrichts nichts benommen, wenn, da diese Linie nicht weggelassen werden konnte, hier bloß die Gründe ihrer Eintheilung deutlich erklärt und ihr ehmaliger Gebrauch mit Weglassung aller itzt unnöthigen Figuren nur in ein paar allgemeinen Aufgaben gewiesen werde. Uebrigens dienen zur Kenntnis dieser alten Befestigungsart Freytags, Dögens und Cellarii drey Folianten, selbst Goldmanns dicker Octavband, und anderer größere und kleinere Schriften, wovon ein ziemlich vollständiges Verzeichnis im VIten Stücke, vergl. mit dem IIten, der Einleit. zur mathem. Bücherkenntnis anzutreffen ist.

§. 2. Eintheilung der Lineae fortificatoriae.

I. Man nehme die Fundamentallinie von 10000 Theilen zum Halbmesser des ordentlichen 12Ecks an; so ist dessen Seite die Sehne von $\frac{360°}{12}$ = Chord 30° = 2 sin 15° =

2 X 2588 =

2 × 2588 = 5176 solcher Theile. Folglich erhält man umgekehrt aus der Seite des 12Ecks von 5176 Theilen dessen Halbmesser von 10000 Theilen, nämlich, wie es sich von selbst verstehet, den Halbmesser des Kreises, in welchem sich das 12Eck beschreiben läßt. Man nehme also die Seiten der ordentlichen Figuren vom 4-11Eck auch von 5176 Theilen an: so ist bekannt, daß der Halbmesser des 6Ecks auch 5176 solcher Theile habe; für die andern aber, nämlich für das 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11Eck findet man die Halbmesser aus der Tabula pro Linea Circuli diuidendi des XI Abschn. nach der Regel Detri also: Wenn die Seite des Vierecks 8165 Theile hat, so hat die Seite des Sechsecks oder der Halbmesser 5774 Theile; wie groß ist der Halbmesser des Vierecks, wenn dessen Seite 5176 Theile hat? Demnach

8165 : 5774 = 5176 : Rad. Quadrati

log 5176 =	3,7139943
log 5774 =	3,7614768
log const.	7,4754711
log 8165 =	3,9119562
	3,5635149

Der Halbmesser des Vierecks hat 3660 Theile.

Es ist klar, daß die Summe der Logg. 5176 und 5774 in dieser Rechnung beständig sey, folglich bloß von ihr der Log. der Seitenzahl aus angezeigter Tafel abgezogen werden dürfe. Z. E. für das Fünfeck

log const.	7,4754711
log 6788 =	3,8317418
	3,6437293

Der Halbmesser des Fünfecks hat 4403 Theile u. s. w.

II. Wo 1, 2, 3 stehet, da bedeutet 1 die Länge der Flanke, 2 der Kehllinie, 3 der Capitallinie. Es soll aber nach den Maximen der alten Holländischen Ingenieurs die Flanke $\frac{1}{10}$, die Kehllinie $\frac{2}{10}$, die Capitallinie $\frac{3}{10}$ der innern Polygone seyn. Mithin ist $\frac{5176}{10} = 517\frac{3}{5}$; $\frac{5176}{5} = 1035\frac{1}{5}$; $5176 \times \frac{3}{10} = 1552\frac{4}{5}$.

§. 3. 1 Aufgabe: Den Hauptriß einer beständigen ordentlichen Festung zu ziehen.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 1 die Seite AB eines Fünfecks von 360 F. gegeben. Nehmet diese Länge auf einem verjüngten Maaßstabe, stellet sie auf der Lin. fort. überzwerch zwischen 6, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 5: so ist diese der kleine Radius CA, CB 2c. nämlich des Kreises, für welchen AB die Seite des Fünfecks ist. Verlängert die Radios, und nehmet unverrückt die Weite zwischen 3 überzwerch: so ist diese die Capitallinie AD, BE 2c. Nehmet ferner unverrückt die Weite zwischen 2 über-

zwerch: so ist diese die Kehllinie AF, BG ꝛc. Errichtet in F, G ꝛc. senkrechte Linien. Nehmet noch unverrückt die Weite zwischen 1: so ist diese die Flanke FH, GI ꝛc. Ziehet DH, EI ꝛc. als die Facen: so ist FG die Curtine, CD, CE ꝛc. der große Radius, FK=KG die Nebenflanke, hier die halbe Curtine u. s. w. eine Linie zwischen DE die äußere Polygone, AB die innere Polygone.

Diese Zeichnung des Hauptrisses ist allgemein, auch in einigen Fällen für halbe Bollwerke. Andere Zeichnungen für beständige Facen und Flanken, oder für beständige Curtinen und Facen, werden hier übergangen, weil man dabey mit dem Prop. Zirkel nichts zu thun hat.

§. 4. 2 Aufgabe: Den Hauptriß einer Sternschanze zu zeichnen.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 2 die gegebene Seite AB von einer fünfeckichten. Stellet AB überzwerch auf der Lin. fortif. zwischen 6, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen 5: so ist die ihr gleiche AC=BC der Halbmesser des Kreises, in welchem sich diese Seite 5mal herumtragen läßt. Beschreibet über jeder Seite ein gleichseitiges Dreyeck ABD u. s. w.

Eine andere Auflösung. Weil bey dieser Zeichnung jeder auswärtsgehende Winkel ADB von 60° wird, welcher nach dem Urtheil der Ingenieurs der möglichst kleinste ist: so macht man ihn gemeiniglich größer, und fortificiret, oder zeichnet vielmehr von außen hinein, indem man Tab. VIII Fig. 3, aus der gegebenen Polygone EF das Vieleck beschreibet, nämlich mit der Lin. Circ. divid. XI Abschn. §. 5 den Halbmesser suchet, aus dem Mittelpuncte G das Loth GH auf EF fället, beym Fünfeck $HI=\frac{1}{7}EF$ abschneidet, und so den Umriß ziehet. S. Struensees Kriegsbauk. I Th. §. 230.

§. 5. Beschluß dieses Abschnitts.

Der Hauptriß einer Redoute ist ein Viereck. Was mit zu spitzigen und zu stumpfen Winkeln, mit zu langen oder zu kurzen Polygonen, anzufangen sey, wo und was für Aussenwerke anzulegen, und wie von allen diesen Dingen die Hauptrisse anzufertigen sind ꝛc. dieses alles gehöret nicht hieher. Auf dem im X Abschn. §. 20 angezeigten Pr. Zirk. befindet sich 1) eine Linea fortif. 2) Operum externorum, auf der einen Seite; auf der andern 3) Operum campestrium und 4) die daselbst angeführte Mort. dirigens. Die Mathematik ist von den alten Holländischen Ingenieuren doch zu sehr gemißbraucht worden. Da es der Elementarbücher über die Fortification eine so große Menge giebt: so ist dem Deutschen Ingenieur Struensees Kriegsbaukunst in 3 Bänden, als das beste, zu empfehlen. Wer einzele Materien gründlich studiren will: dem ist das vom Hrn. Geh. R. Böhm in Gießen in 6 Bänden herausgegebene Magazin für Ingenieurs und Artilleristen unentbehrlich, von welchem eine Fortsetzung zu erwarten ist.



XIV. Von der Linea Metallica.

TABULA METALLICA.					
Materie.	Theile.	Theile der Fundam. Lin.	Materie.	Theile.	Theile der Fundam. Lin.
☉ Gold	74$\frac{1}{3}$	100	♉ Glockenspeise	97	130
☿ Quecksilber	78$\frac{1}{2}$	105	♃ a Engl. Zinn	97$\frac{1}{2}$	131
♄ Bley	86	115	♃ v Gemein. Zinn	99$\frac{1}{2}$	133
☾ Silber	90$\frac{1}{3}$	121	♂ Eisen	100	134
♀ Kupfer	94	126	Lp Marmor	151	203

§. 1. Erklärung und Gebrauch dieser Linie.

Die Linea metallica dienet, die Durchmesser gleich schwerer Kugeln, also überhaupt die ähnlich liegende Seiten gleich schwerer ähnlicher Körper von verschiedenen Metallen zu finden.

* Galilei hat schon diese Linie auf dem Pr. Zirk. angenommen.

§. 2. Eintheilung.

Man hat den Durchmesser z. E. der 1pf. eisernen Kugel von 100 Theilen angenommen, und in solchen Theilen die Durchmesser gleich schwerer Kugeln z. E. der 1pf. bleyernen u. a. m. gesucht. Da nämlich die Dichtigkeiten gleich schwerer Körper sich verkehrt, wie ihr Inhalt, folglich bey Kugeln verkehrt, wie die Würfel ihrer Durchmesser, sich verhalten: so sey die Dichtigkeit des Eisens, und zwar des gegossenen 7,205 (eine mittlere Zahl aus Hanows Phys. dogm. T. II. §. 565, der unter allen die vollständigste Tafel der Dichtigkeiten mit eignen Vermehrungen hat), auch nach ihm eines Hungar. Ducatens 18, 261: so hat man 18, 261 : 7, 205 = $\overline{100}^2$: Cub. Diam. Sph. ☉. Demnach mit den logg.

log 1000000 + log 7,205 = 6,8576340
log 18,261 = 1,2615246
5,5961094
3) 1,8653698

Der Durchmesser der 1pf. goldnen Kugel hat 73$\frac{1}{3}$ solcher Theile.

Daß hier 73$\frac{1}{3}$ Theile herauskommen, in der Tafel aber 74$\frac{1}{3}$ angesetzt sind: davon kommt nachher die Anzeige der Ursache vor. Eben so verhält es sich mit den übrigen Metallen,

tallen, und man siehet ein, wie die Zahlen der Spalten, über welche Theile stehet, gefunden worden, oder gefunden werden können. Wollte man sie aus den Datis im Hanow berechnen: so würde man in etwas verschiedene Zahlen erhalten. Auf dem Prop. Zirkel hat man die halbe Fundamentallinie von 100 Theilen zum Durchmesser der goldnen Kugel genommen, und so die übrigen Durchmesser gleich wichtiger Kugeln nach der Regel Detri gefunden. Z. E. nach dem Goldmann, dessen Tafel Scheffelt ein einigem vermehrt hat, ist für den Marmor $74\frac{1}{3} : 151 = 100 : 203$. Also sind Tab. I Fig. 1, dafür 203 Theile aufgetragen worden; weßwegen sie um 3 solche Theile länger ist, als die übrigen alle.

§. 3. Goldmanns Erinnerung.

Scheffelt merket aus dem Goldmann sehr richtig hierbey an, daß 1) die Dichtigkeit des geschmiedeten Metalls größer, als des gegoßnen sey, mithin von dieser Linie nicht zu viel gefordert werden könne; 2) daß auch von einerley Art Metalls eines dichter sey, als das andere, z. E. fein Gold, als anderes, (daher die verschiedene Zahlen beym Hanow a. a. O. für gegossenes Eisen 6,960; 7,135; 7,520, die mittlere Zahl 7,205.) 3) daß des Archimedes Probe im Wasser ihre Schwierigkeit habe, theils, weil bey der Vermischung ein Theil des vollkommneren Metalles in die Zwischenräume des unvollkommnen dringe, theils, welches ihm Andreas Gryphius (den Goldmann mit Recht praeclarum in omni scibili Virum nennet, gar nicht einer von den Sängern, qui nihil norunt, praeter vinum et puellas) gewiesen habe, weil man in ein mit Wasser gefülltes Glas viele Goldstücke legen könne, ohne daß etwas herauslaufe, mithin, was Archimedes gethan, ihm ungeschickte Hände nicht nachthun dürften.

* S. Hr. Hofr. Kästners Anfangsgründe der Hydrost. §. 54, nebst den daselbst angezeigten Schriften. Die neueste ist dessen eigene Abhandlung T. VI Nov. Comm. soc. Reg. Sc. Gott. Goldmann war Bechers und Glaubers Zeitgenosse.

§. 4. 1 Aufgabe: Aus dem gegebenen Durchmesser einer Kugel von einem gewissen Metalle, den Durchmesser einer gleich schweren von einem andern Metalle zu finden.

Auflösung. Es sey Tab. VIII Fig. 1 der Durchmesser A B der 1pf. eisernen Kugel gegeben, der zugleich Tab. Fig. 1 auf der einen Seite des Prop. Zirkels aufgetragen ist: man suchet den Durchmesser der 1pf. bleyernen Kugel. Stellet A B überzwerch auf der Lin. metall. zwischen ♂, und unverrückt nehmet überzwerch die Weite zwischen ♄: so ist die ihr gleiche C D der Durchmesser der 1pf. bleyernen Kugel.

Hat man diesen gefunden: so ergiebt sich daraus die Eintheilung des Caliberstabes für solche Kugeln, vermittelst der Lin. cub. IX A. §. 36.

§. 5. 2 Aufgabe: Das Gewichte der fünf ordentlichen Körper zu finden, welche zu einerley Kugel gehören, wenn sie aus einerley Metall gemacht werden.

Auflösung. Gesetzt, es sollten alle aus Eisen gemacht werden und der Durchmesser der Kugel sey AB Tab. VIII Fig. 2. Stellet AB auf der Linea Corp. Sph. inscr. überzwerch zwischen den Endpuncten, und unverrückt nehmet überzwerch die Weiten zwischen den Zeichen der 5 ordentlichen Körper: so sind die ihnen gleiche CD, EF, GH, IK, LM die Seiten des Tetr. Oct. Hex. Icos. und Dodecaëdri.

§. 6. Zusätze.

I. Will man diese 5 Körper in Kugeln verwandeln: so erhält man deren Durchmesser vermittelst der Lin. Red. Corp. regul. da denn diese Durchmesser cd, ef, gh, ik, lm seyn werden.

II. Weiß man das Gewichte einer eisernen Kugel, deren Durchmesser gegeben ist: so kann man solches für die 5 ordentliche Körper von Eisen finden, welche sich in diese Kugel beschreiben lassen. Die Kugel wiege $\frac{1}{8}$ Pf. Denn nach der Zeichnung ist Fig. 2 AB die Hälfte von AB Fig. 1. Da nun die Gewichte gleich dichter Körper sich wie ihre Räume verhalten: so stelle man den Durchmesser der $\frac{1}{8}$ pf. Kugel auf der Lin. cub. zwischen 32 und suche unverrückt, zwischen welche Zahlen sich die Durchmesser cd, ef, gh, ik, lm, überzwerch stellen lassen. Diese Zahlen mit 8 dividiret, weil die $\frac{1}{8}$ pf. Kugel $\frac{32}{8} = 4$ Loth wieget, geben die Gewichte des Tetr. $2\frac{1}{16}$, des Oct. $2\frac{1}{4}$, des Hex. 3, des Icos. $3\frac{1}{2}$, des Dodecaëdri $3\frac{3}{4}$ Loth.

§. 7. 3 Aufgabe: Aus der gegebenen Seite eines 1pf. eisernen Würfels die Länge der Seiten der 1pf. Würfel aus den übrigen Materien zu finden.

Auflösung. Suchet die Durchmesser der 1pf. Kugeln zu dem gegebenen Durchmesser der 1pf. eisernen, von den übrigen Metallen und Materien §. 4. Suchet zu den gefundenen Durchmessern gleich schwerer Kugeln vermittelst der Lin. Reduct. Corp. regul. die Seiten der ihnen gleichen Würfel. Die 3te Figur zeiget die Durchmesser der 1pf. Kugeln aus Eisen, Marmor, Engl. Zinn, Gemeinem Zinn ꝛc. und die Seiten der 1pf. Würfel aus eben diesen Materien; welcher Länge sich also vermittelst des verjüngten Maaßstabes näher bestimmen läßt.



Zusätze zur historischen Einleitung.

(*) Neu erfundene Mathematische und Optische Curiositäten — durch Johann Christoph Kohlhansen. Leipz. 1627. 4. 320 Seit. rc. 25 K. taf.

Die 19 und 20ste Tafel zeiget einen mit schrecklich viel Linien überladenen Proport. Zirkel vor; wo unter andern Linien für das Cron- so gar Thron-Royal vorkommen.

(*) Noua Praxis construendi Circinum proportionalem horographicum. Viennae 1695. Quart. obl. 39 Seit. 21 K. taf.

In dieser Schrift verbessert der ungenannte Verfasser die vom Schott in der Amussi Ferdinandea vorgeschlagene Lineam horographicam.

Von Bions Traité de la Constr. des Instrum. ist eine neue Ausgabe von 1752 vorhanden. Gaz. litt. de l'Europe 1766. Avr. p. 475.

In eben dieser Gaz. 1770. Iuin p. 457-463 ist eine Anzeige von einem Compas d'une nouvelle Construction, nämlich von einem neuen Prop. Zirk. der gar sehr verbessert seyn soll. Er soll auf Praenumeration 24 Livr. nachher aber 56 Livr. kosten.

* * *

NICOLAUS GOLDMANN de Vsu Proportionatorii, pag. vlt.

Finem opusculi hic facimus, quod omissum est, Lector beneuolus supplere dignetur; quae abundant, resecet, per me licet. Dum omnibus scribere nitimur, aut certe attentis, omnibus placere haud possumus.

Ende.



Anzeige
der Verbesserungen und Druckfehler.

Histor. Einl. Seite 3 Zeile 29 st. dem Winkelmaß l. dem Winkelmaaß oder Maaßstab. S. 5 Z. 17 st. 163 l. 136. S. 9 Z. 19 st. ogt l. oyt. S. 10 Z. 17 st. te l. le S. 11 Z. 27 st. Galgmayr l. Galgemayr. S. 12 Z. 12 st. e's l. és. Z. 22 st. von l. vor. Z. 27 st. Iustruments l. Instruments. S. 13 Z. 8 st. sondern l. besondern. S. 16 Z. 31 st. der kurzen l. den kurzen Begriff der Z. 33 st. handelt l. handelt er. S. 17 Z. 32 st. D. H. l. J. H. S. 18 Z. 1 hinerinnen l. hierinnen.

I. Abschnitt. S. 20 Z. 20 st. Linten l. Linten oder Tafeln. S. 22 Z. 12 st. nur l. nun. S. 25 Z. 2 st. N. III. l. N. II.

II. Abschnitt. S. 28 Z. 4 st. Enfahrung l. Erfahrung. S. 31 Z. 36 st. Zahl l. Zahlen. S. 34 Z. 6 st. $z-x^2$ l. z^2-x^2. S. 35 Z. 4 der zweyten Spalte st. $z=58$ l. 85. S. 36 fehlen noch zu $y^2=3600$ die Zahlen $a \times b=90.40$, $y=60$, $z=65$, $x=25$. S. 41 Z. 4 st. $108:1;4=\frac{1}{18}$ l. $108:1728=\frac{1}{18}$. Z. 20 st. ΛE l. AE. Das A siehet mehrmalen aus, wie Λ. S. 43 Z. 35 st. AG l. AS. Z. 36 st. PA l. Pa. S. 44 Z. 7 st. 2,3,4,5 l. 2,4,6,8,10. Z. 29 Dreymaltheile l. Decimaltheile. S. 45 letzte Z. st. §. 28 l. §. 29. S. 46 Z. 15 st. RA l. Ra. S. 51 Z. 4 st. für das erste C von 4 F. ist, l. ist für das erste C von 4 F. Z. 9. st. $\overline{\overline{e}}$ l. $\overline{\overline{c}}$. Z. 10 st. CD l. ED.

III. Abschnitt. S. 54 Z. 4 st. 8,725 l. 8,775. S. 55 Z. 9. st. 288.293 l. 288 . 293. Z. 11 st. Röhle l. Röhl. Z. 23 st. 8,32,72,9,36;81; l. 8,32,72;9,36,81. S. 57 Z. 10. S. 58 Z. 19 st. Glieder l. Gliedern. S. 58 Z. 8. l. $a=\frac{A-4n(n-1)}{n}$. S. 63 Z. 8 st. 14 l. 24 Ellen, letzte Z. st. Hypothenuse l. Hypotenuse. S. 64 Z. 18 st. Längenmäß l. Längenmaaß. Z. 35 st. Grundlinie l. Grundlinien. S. 67 Z. 7. st. seyn l. sey. S. 68 Z. 21 st. No l. KO. Z. 25 st. KOq um l. KOq, S. 69 Z. 26 st. a b l. ab. S. 70, 71, 84, 103, 111, 129 in ausgeführten Rechnungen soll das f oder F einen (oder [vorstellen, um Quotienten oder Wurzeln zu unterscheiden. S. 70 Z. 30 st. 2355. l. 2355 Z. 31 st. 3925 l. 3925 Z. 32 st. 6|0)9 l. (1|0)9. Zwischen 3567 und 25 sollte kein leerer Platz seyn. S. 73 Z. 15 st. 5×332 l. 5×333. S. 75 Z. 8 st. §. l. §. 16. S. 76 Z. 30 st. $10:25=25$ l. $10:25=2:5$, S. 77 letzte Z. st. 64 l. überzwerch zwischen 64.

IV. Abschnitt. S. 79 Z. 24 st. gleichen l. gleiches. S. 82 Z. 14 st. Verhalten l. verhalten.

V. Abschnitt. S. 88 Z. 4 st. halbe l. den halben, Z. 33 st. 52, 36 l. 32, 36. S. 89 Z. 11 st. OLM l. OML.

VI. Abschnitt. In diesem folgenden Abschnitte sind bey so vielen Rechnungen, wegen der großen Sorgfalt des Herrn Correctors, ungemein wenig Fehler anzumerken:

S. 90 in der Spalte: soliditas vnius Pyramidis darf die erste Zahl am Ende nur 3 Nullen und die zweyte Zahl nur 4 Nullen haben, so viel, als die vierte und fünfte Zahl haben. In der dritten muß zwischen den letzten beyden Ziffern 67 ein Comma stehen. Denn vermöge S. 96. VI. 7 stehen hier 6, 7 st. $6\frac{2}{3}$. S. 91 in der Spalte Partes Z. 3 st. 1312 l. 1316 §. 1. Z. 10 st. des l. das. S. 92 Z. 30 st. im l. ein. S. 93 Z. 6. l. $\sqrt{(EBq-DBq)}$ Z. 24 st. F. B. E. l. F, B, G. S. 94 Z. 15 st. dem Zähler $a^3\sqrt{3}$ l. $a^2\sqrt{3}$. S. 95 Z. 16 st. $-\frac{1}{3}ABF$ l. $=\frac{1}{3}ABF$. S. 97 Z. 7 heißt der Nenner des Bruches, dessen Zähler 2a ist, $\sqrt{(3-\sqrt{5})}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. S. 98 Z. 11 st. $\frac{1}{10}$ l. $\frac{1}{20}$. Z. 15 ist der Nenner des Bruchs zur rechten $6\sqrt{(3-\sqrt{5})}$ S. 99 Z. 6, 7, 8 l.

$$\begin{array}{r} 34410 \\ \underline{13764} \\ 172050000 \end{array}$$

Z. 20 des Vierecks l. einer Seitenfläche gedachten Würfels. Z. 26 l. log $\sqrt{(\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}:\sqrt{2})}$ S. 100 Z. 2 st. des Zählers des zweyten Bruches $a^2.2$ l. $2.a^2$ Z. 3 st. 6708 l. 6,708. Z. 18 l. $\overline{11135}$. S. 101 Z. 14 ist der Nenner des Bruches zur linken $30\sqrt{2(2+\sqrt{5})}$. S. 103 Z. 11 st. z^n l. 2^n.

VII. Abschnitt. S. 105 Z. 26 l. 4., 1. 5. 0 5. 1 5. 0. S. 106 Z. 17 st. CD l. CB. Z. 1 zu Anfange l. $=2r^2\times\frac{3-\sqrt{5}}{5}$. S. 107 Z. 18 st. $\frac{3}{3}d^2$ l. $\frac{2}{3}d^2$. S. 108 Z. 25 st. 4427 l. 4472; S. 110 Z. 30 st. 5 L l. 3 L. mithin letzte Z. l. 17319. S. 111 Z. 35 st. CF l. CB.

VIII. Abschnitt. S. 113 tan 44° ist 9657 letzte Z. st. der Tangente, aller l. der Tangenten aller. S. 115 Z. 10 st. 200° l. 200 st. $70\frac{1}{2}$ l. $70°\frac{1}{2}$. Z. 24 st. 0,45° l. 0.45°.

IX. Abschnitt. S. 117 Würfel 69 Seite 8837. S. 118 Col. Titel st. XI l. IX. S. 119 Z. 11 l. $x:y=y:b$ sey. Demnach S. 120 Z. 18 man l. sie. S. 122 Z. 11. 12. 13. st. 256 l. 216. Z. 23 st. Cubiczahlen l. Cubiczahlen ist st. als l. also. S. 126 Z. 26 st. §. vI. VI. l. §. 17. VI. S. 127 Z. 17 st. $D^2=144$ l. $D^2=196$. S. 128 Z. 33 st. 41, l. 41 ist. S. 133 Z. 8 st. LMc l. LMq. S. 136 Z. 4 st. $\frac{c^2}{a}c$ l. $\frac{c^2}{a}, c$. S. 140 Z. 6 l. $y=\sqrt[3]{}$ u. s. w. Z. 27 l. $GI=2\times40$. Z. 30. 31. 32 st. den l. dem. Z. 32 st. gleich sey. S. 141 Z. 21 st. ist l. war.

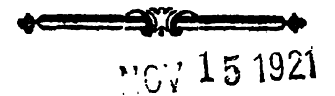
X. Abschnitt. S. 143 Grad 157 Sehne 9799. S. 149 Z. 14 st. $44°\frac{1}{2}$ l. $44\frac{1}{2}$. S. 153 Z. 19 st. 215 F. W. l. 215 F. und Z. 23 st. BD l. BC. S. 154 Z. 25 angezeit l. angezeigt.

XI. Abschnitt. S. 155 Z. 24 st. 26, 29, 29 l. 26, 29. Z. 25 st. für das l. nämlich für das. S. 157 Z. 31 st. $7°\frac{1}{2}$ l. $7''\frac{1}{2}$.

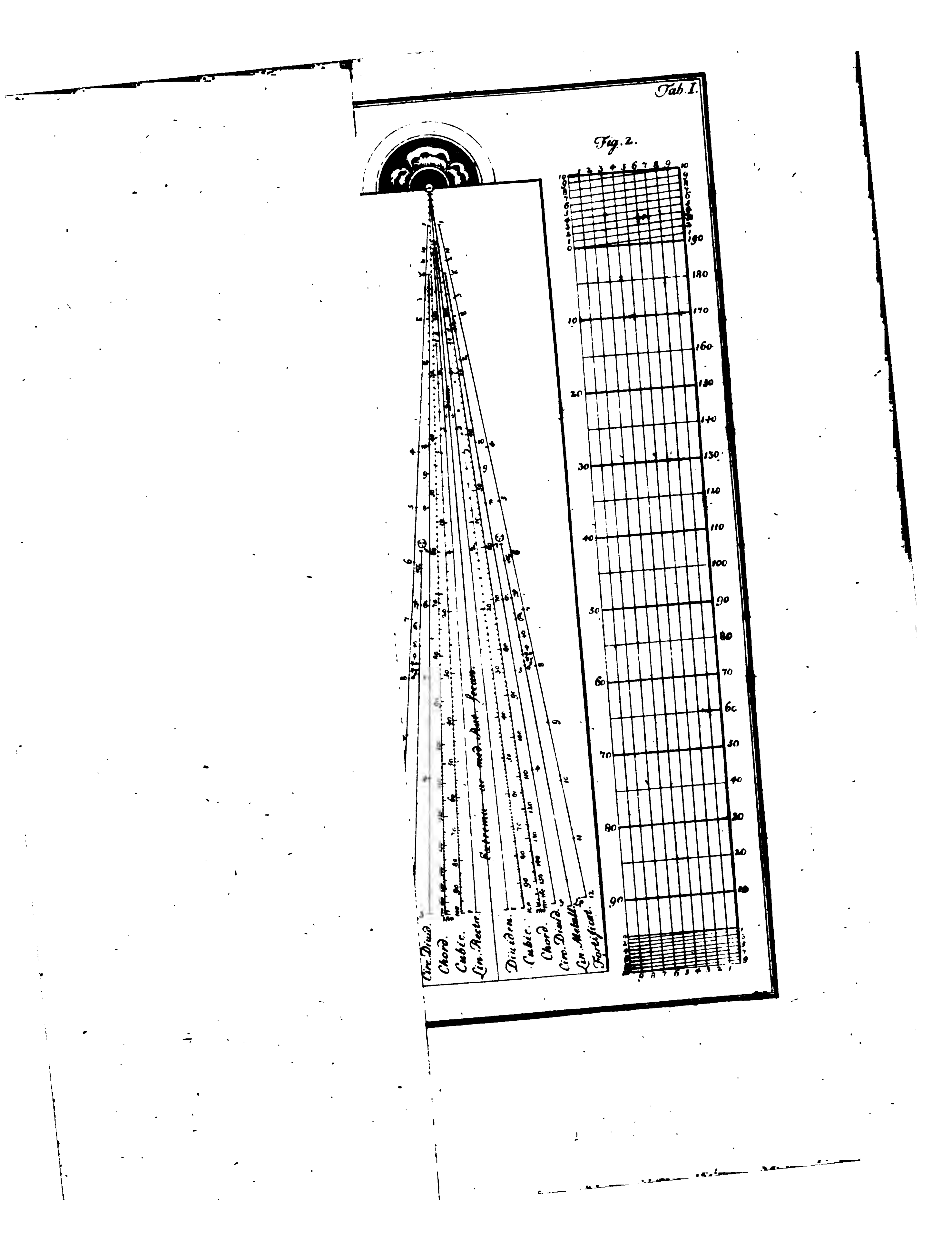
XII. Abschnitt. S. 158 Z. 17 st. Linae l. Lineae. Z. 24 st. beygsetzte l. beygesetzte Z. 26 st. 200 Theile l. 2000 Theile. S. 159 Z. 8 st. kömmt l. kommt. Z. 12 st. Versehn l. Versehen. S. 160 Z. 26 in E l. in F. Z. 33 st. KON l. KOM. Z. 34 st. ON l. OM.

XIII. Abschnitt. S. 162 Z. 13 st. 35. 55 l. 35.55. Z. 23 st. anderer l. andere.

XIV. Abschnitt. S. 166 Z. 19 st. weil l. wie.



Es ist einem bloßen Versehen zuzuschreiben, daß der 14 und 15te Bogen eine doppelte Signatur O P und O R, bekommen haben, da die Seitenzahlen ganz ordentlich fortlaufen.



Tab. I.
Fig. 2.
Circ. Divid.
Chord.
Cubic.
Lin. Rectae.
Dividen.
Cubic.
Chord.
Circ. Divid.
Lin. Metall.
Fortificat.

S. 90 in der Spalte: soliditas vnius Pyramidis darf die erste Zahl am Ende nur 3 Nullen und die zweyte Zahl nur 4 Nullen haben, so viel, als die vierte und fünfte Zahl haben. In der dritten muß zwischen den letzten beyden Ziffern 67 ein Comma stehen. Denn vermöge S. 96. VI. 7 stehen hier 6, 7 st. $6\frac{2}{3}$. S. 91 in der Spalte Partes Z. 3 st. 1312 l. 1316 §. 1. Z. 10 st. des l. das. S. 92 Z. 30 st. im l. ein. S. 93 Z. 6. l. $\sqrt{(EBq - DBq)}$ Z. 24 st. F. B. E. l. F, B, G. S. 94 Z. 15 st. dem Zähler $a^3\sqrt{3}$ l. $a^2\sqrt{3}$. S. 95 Z. 16 st. $-\frac{1}{3}ABF$ l. $=\frac{1}{3}ABF$. S. 97 Z. 7 heißt der Nenner des Bruches, dessen Zähler $2a$ ist, $\sqrt{(3-\sqrt{5})}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$. S. 98 Z. 11 st. $\frac{1}{10}$ l. $\frac{1}{20}$. Z. 15 ist der Nenner des Bruchs zur rechten $6\sqrt{(3-\sqrt{5})}$ S. 99 Z. 6, 7, 8 l.

$$\begin{array}{r} 34410 \\ 13764 \\ \hline 172050000 \end{array}$$

Z. 20 des Vierecks l. einer Seitenfläche gedachten Würfels. Z. 26 l. log $\sqrt{(\sqrt{3}\sqrt{(3+\sqrt{5})}:\sqrt{2})}$ S. 100 Z. 2 st. des Zählers des zweyten Bruches $a^2.2$ l. $2.a^2$ Z. 3 st. 6708 l. 6,708. Z. 18 l. $\overline{11135}$. S. 101 Z. 14 ist der Nenner des Bruches zur linken $30\sqrt{2}(2+\sqrt{5})$. S. 103 Z. 11 st. z^0 l. 2^0.

VII. Abschnitt. S. 105 Z. 26 l. 4., 1.5.05.15.0. S. 106 Z. 17 st. CD l. CB. Z. 1 zu Anfange l. $=2r^2 \times \frac{3-\sqrt{5}}{5}$. S. 107 Z. 18 st. $\frac{2}{3}d^2$ l. $\frac{2}{3}d^2$. S. 108 Z. 25 st. 4427 l. 4472; S. 110 Z. 30 st. 5 L l. 3 L. mithin letzte Z. l. 17319. S. 111 Z. 35 st. CF l. CB.

VIII. Abschnitt. S. 113 tan 44° ist 9657 letzte Z. st. der Tangente, aller l. der Tangenten aller. S. 115 Z. 10 st. 200° l. 200 st. $70\frac{1}{2}$ l. $70^\circ\frac{1}{2}$. Z. 24 st. 0,45° l. 0.45°.

IX. Abschnitt. S. 117 Würfel 69 Seite 8837. S. 118 Col. Titel st. XI l. IX. S. 119 Z. 11 l. $x:y=y:b$ sey. Demnach S. 120 Z. 18 man l. sie. S. 122 Z. 11. 12. 13. st. 256 l. 216. Z. 23 st. Cubiczahlen l. Cubiczahlen ist st. als l. also. S. 126 Z. 26 st. §. VI. VI. l. §. 17. VI. S. 127 Z. 17 st. $D^2=144$ l. $D^2=196$. S. 128 Z. 33 st. 41, l. 41 ist. S. 133 Z. 8 st. LMc l. LMq. S. 136 Z. 4 st. $\frac{c^2}{a}c$ l. $\frac{c^2}{a}, c$. S. 140 Z. 6 l. $y=\sqrt[3]{}$ u. s. w. Z. 27 l. $GI=2\times 40$. Z. 30. 31. 32 st. den l. dem. Z. 32 st. gleich sey. S. 141 Z. 21 st. ist l. war.

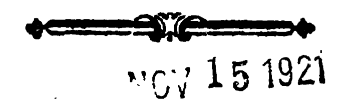
X. Abschnitt. S. 143 Grad 157 Sehne 9799. S. 149 Z. 14 st. $44^\circ\frac{1}{2}$ l. $44\frac{1}{2}$. S. 153 Z. 19 st. 215 F. W. l. 215 F. und Z. 23 st. BD l. BC. S. 154 Z. 25 angezeit l. angezeigt.

XI. Abschnitt. S. 155 Z. 24 st. 26, 29, 29 l. 26, 29. Z. 25 st. für das l. nämlich für das. S. 157 Z. 31 st. $7^\circ\frac{1}{2}$ l. $7'\frac{1}{2}$.

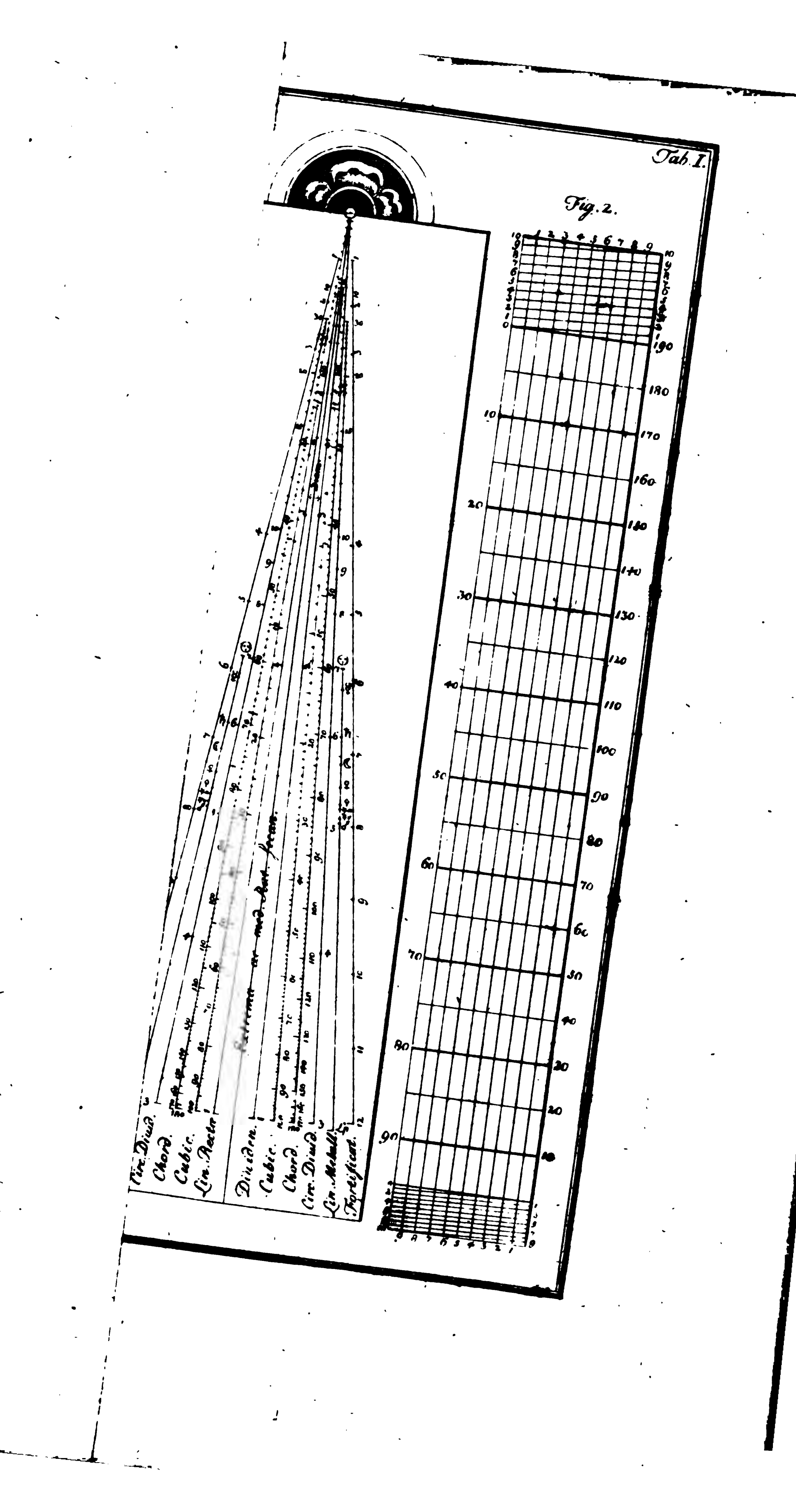
XII. Abschnitt. S. 158 Z. 17 st. Linae l. Lineae. Z. 24 st. beygsetzte l. beygesetzte Z. 26 st. 200 Theile l. 2000 Theile. S. 159 Z. 8 st. kömmt l. kommt. Z. 12 st. Versehn l. Versehen. S. 160 Z. 26 in E l. in F. Z. 33 st. KON l. KOM. Z. 34 st. ON l. OM.

XIII. Abschnitt. S. 162 Z. 13 st. 35. 55 l. 35.55. Z. 23 st. anderer l. andere.

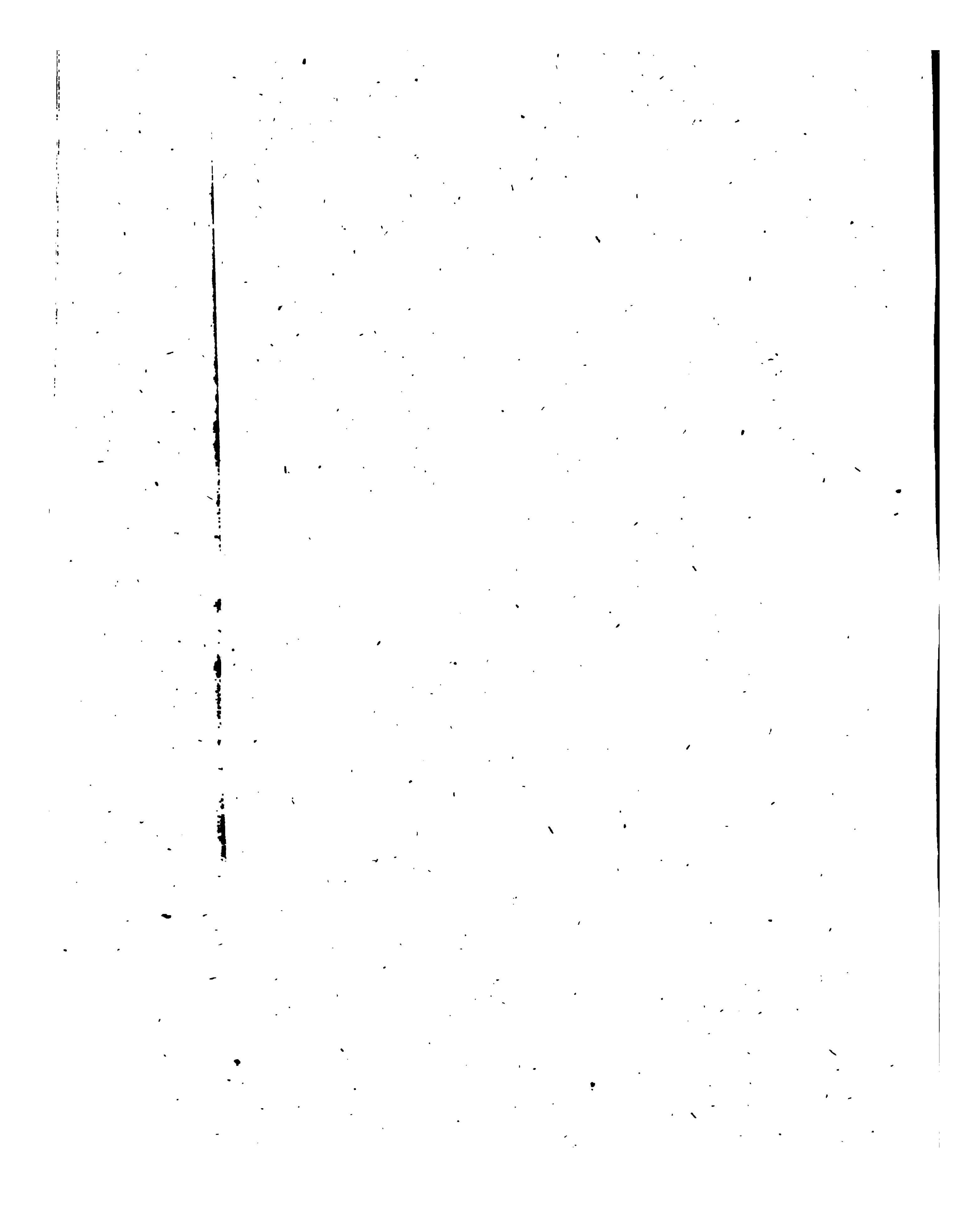
XIV. Abschnitt. S. 166 Z. 19 st. weil l. wie.

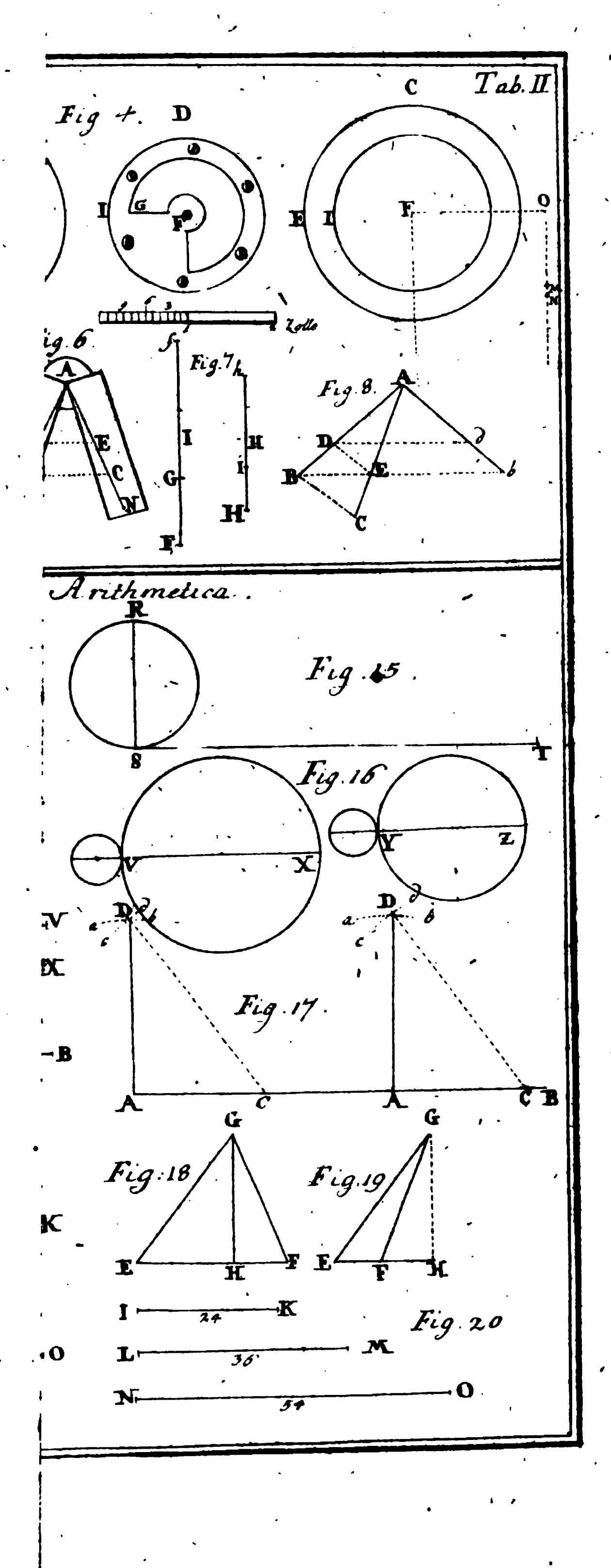


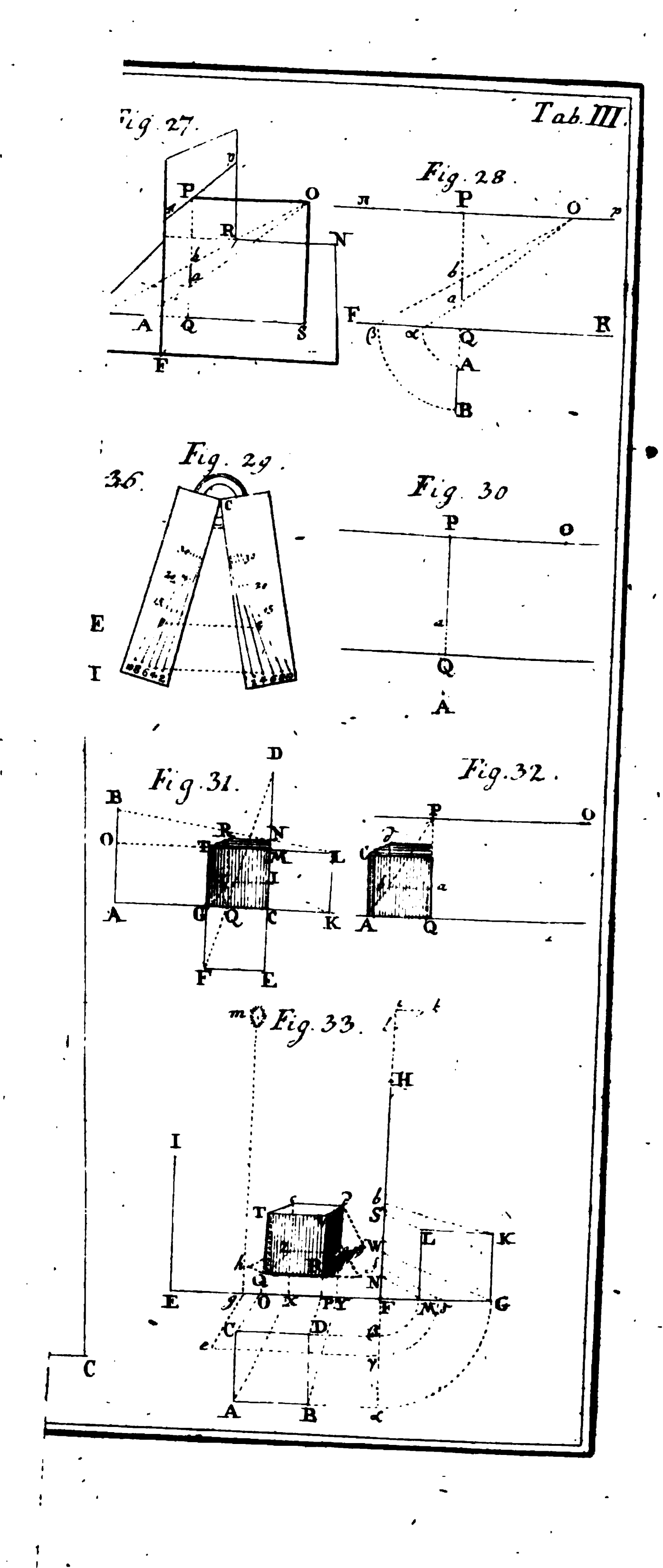
Es ist einem bloßen Versehen zuzuschreiben, daß der 14 und 15te Bogen eine doppelte Signatur O P und O R, bekommen haben, da die Seitenzahlen ganz ordentlich fortlaufen.

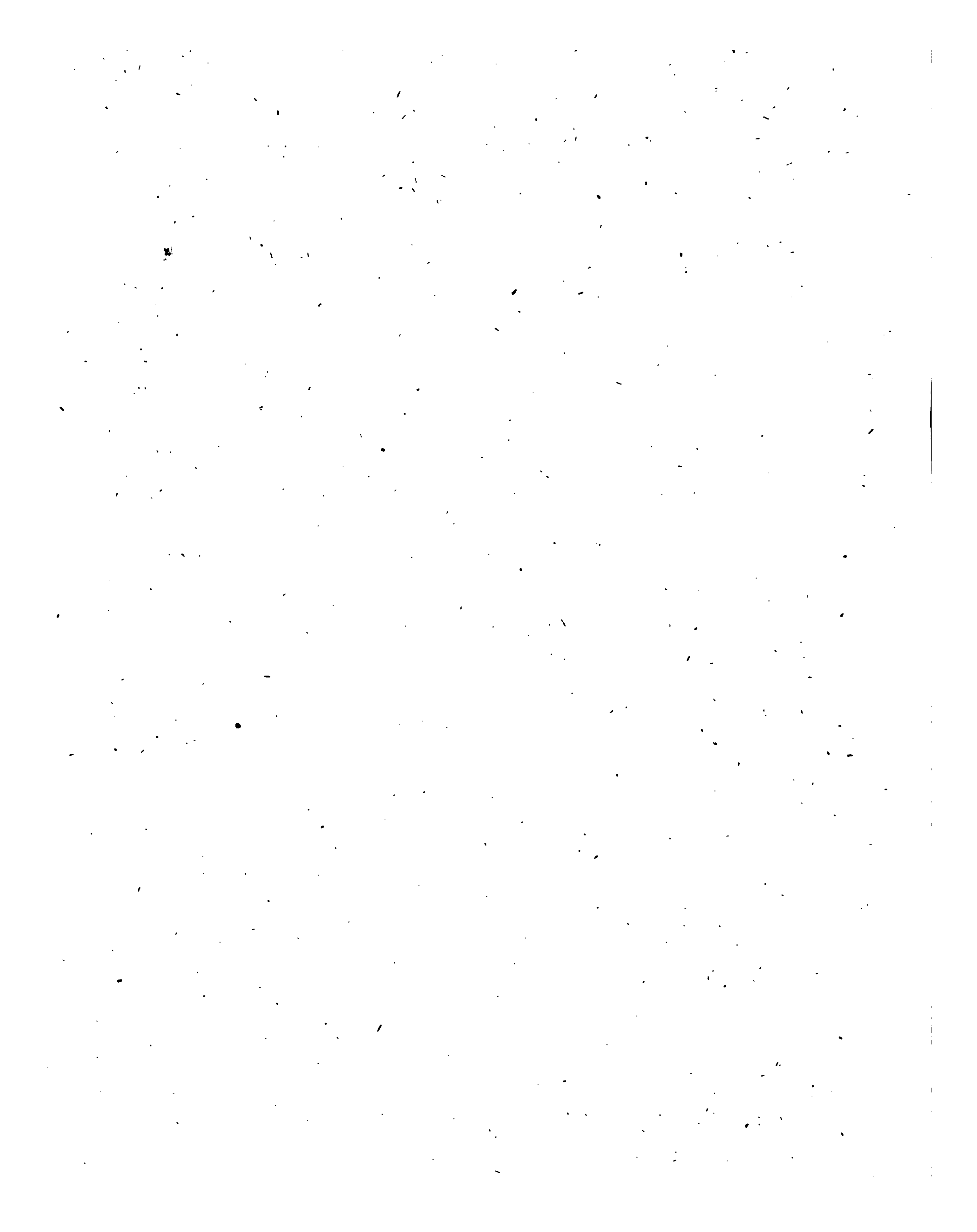


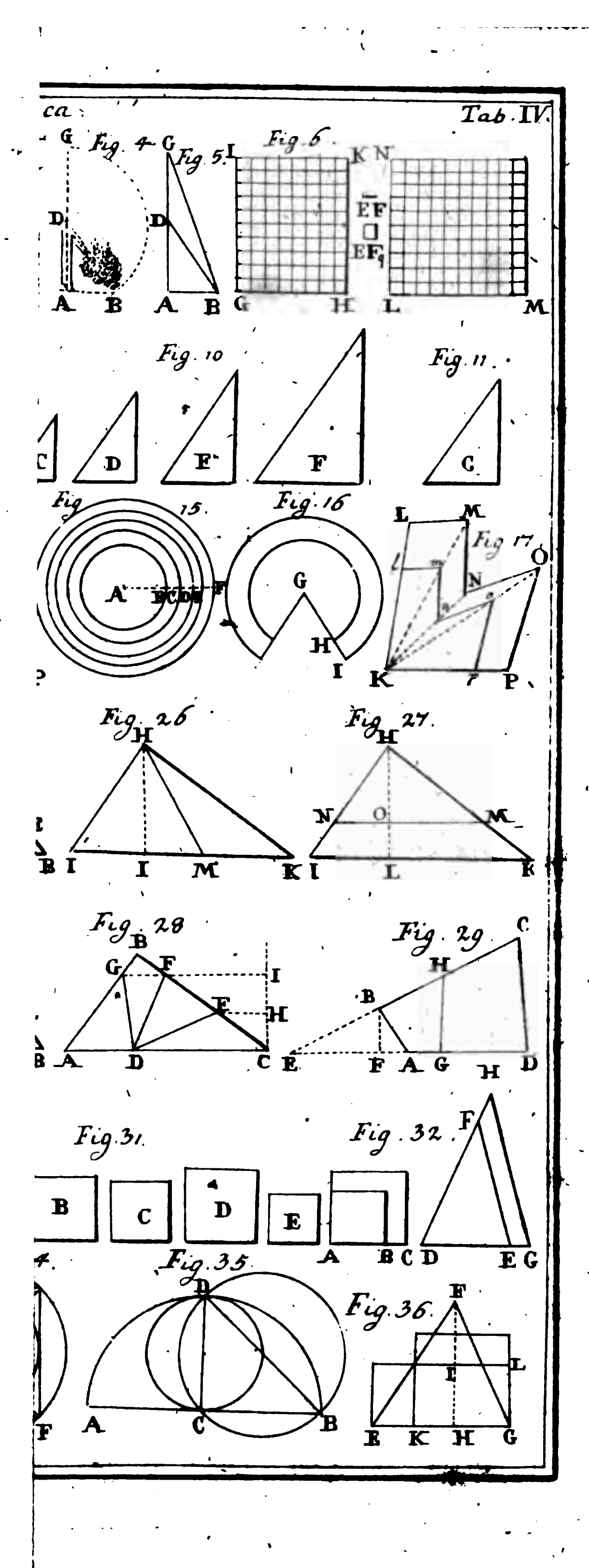
Tab. I.
Fig. 2.
Circ. Divid.
Chord.
Cubic.
Lin. Rectæ
Dividen.
Cubic.
Chord.
Circ. Divid.
Lin. Metall.
Fortificat.

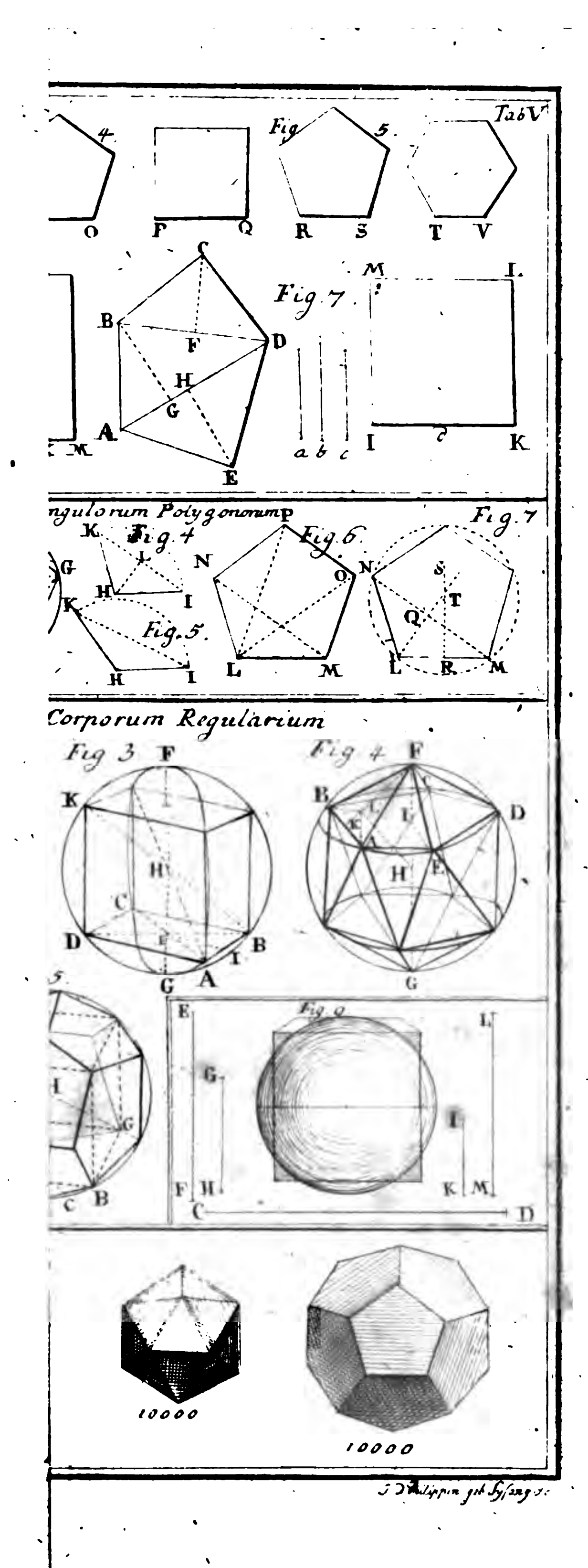



Tab. II
Fig 4.
Fig 6
Fig. 7
Fig. 8.
Arithmetica.
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20

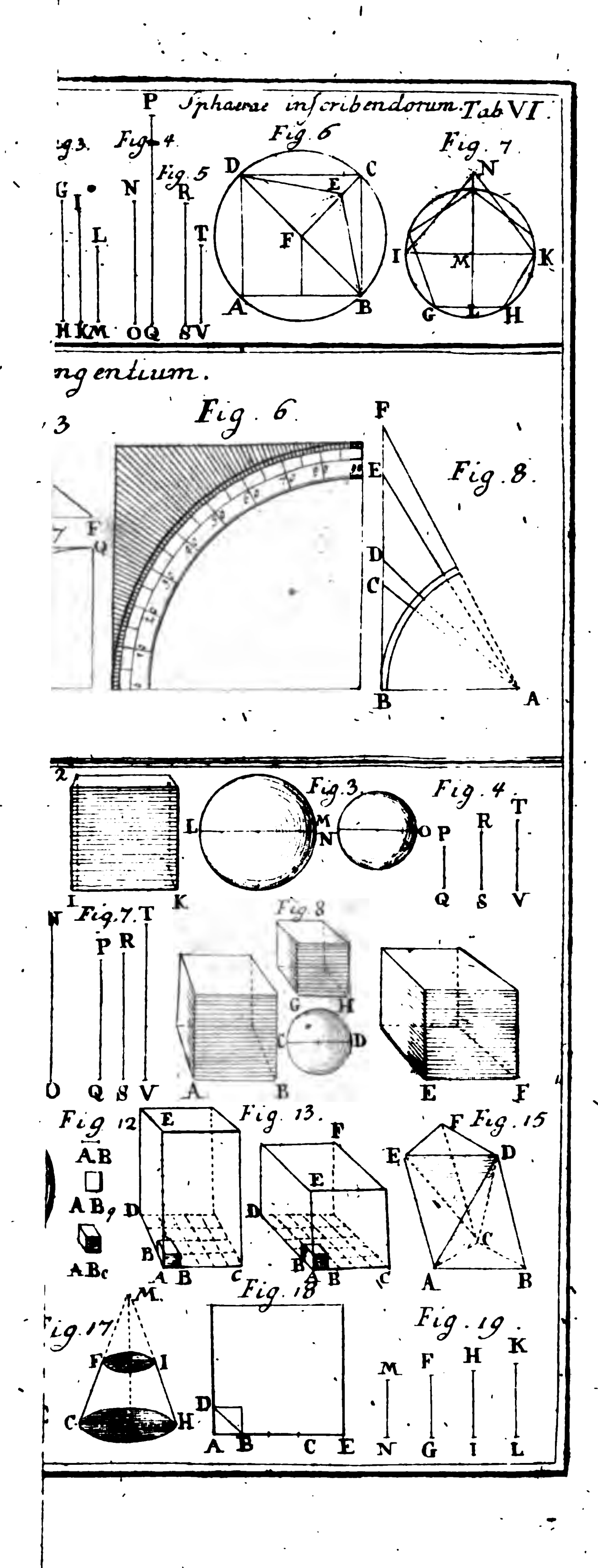

Tab. III.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.



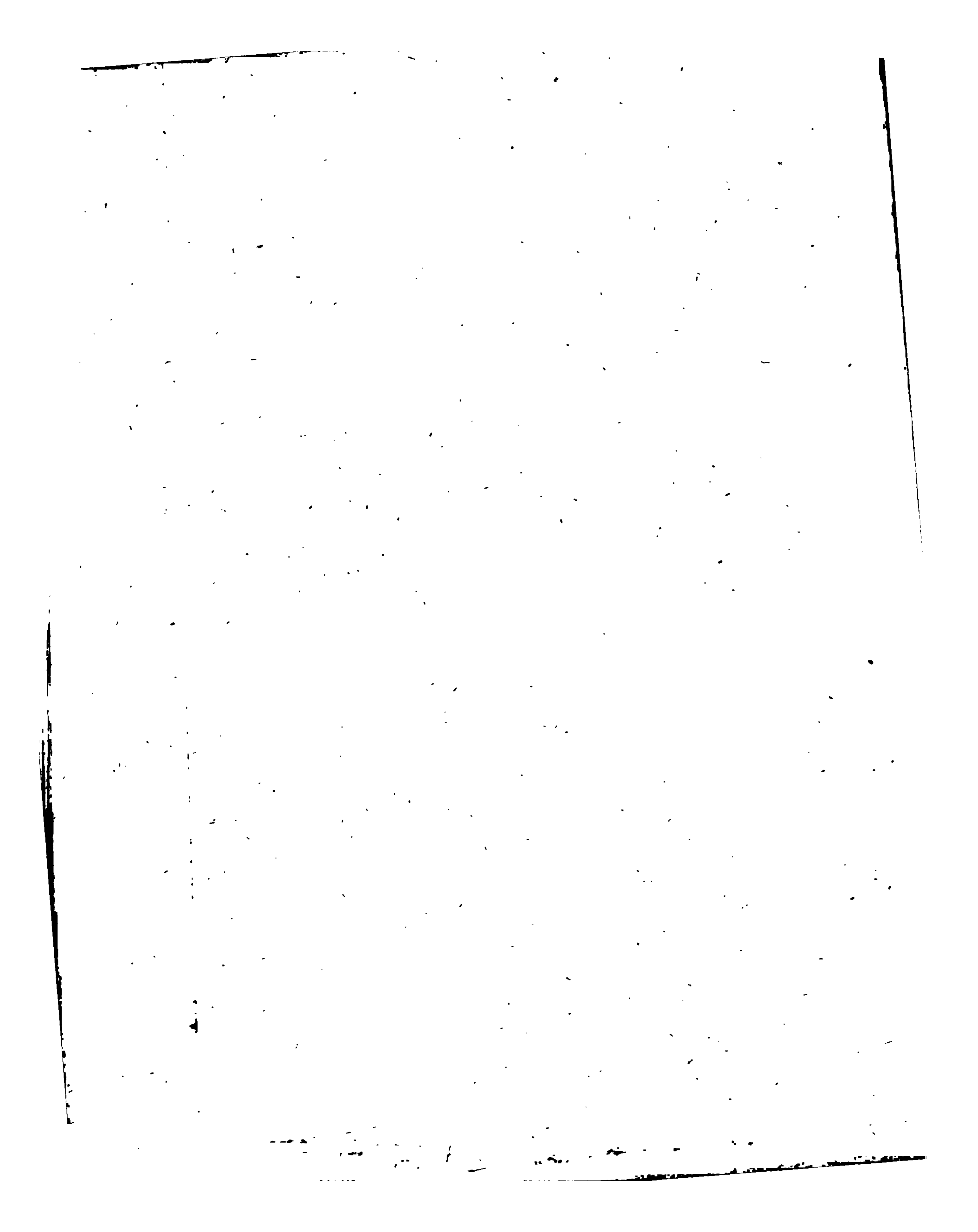

Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 35
Fig. 36

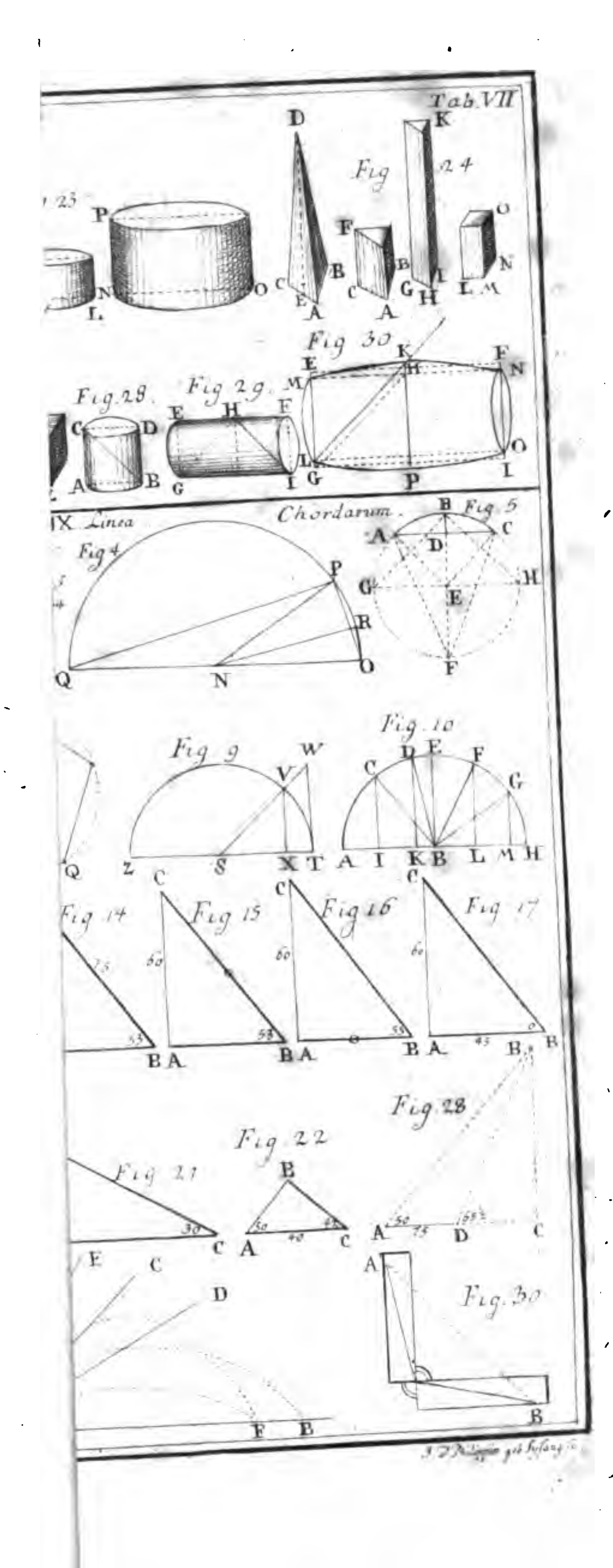

Tab V.
Fig 5.
Fig. 7.
ngulorum Polygonorum
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Corporum Regularium
Fig 3
Fig. 4
Fig. 9
10000
10000



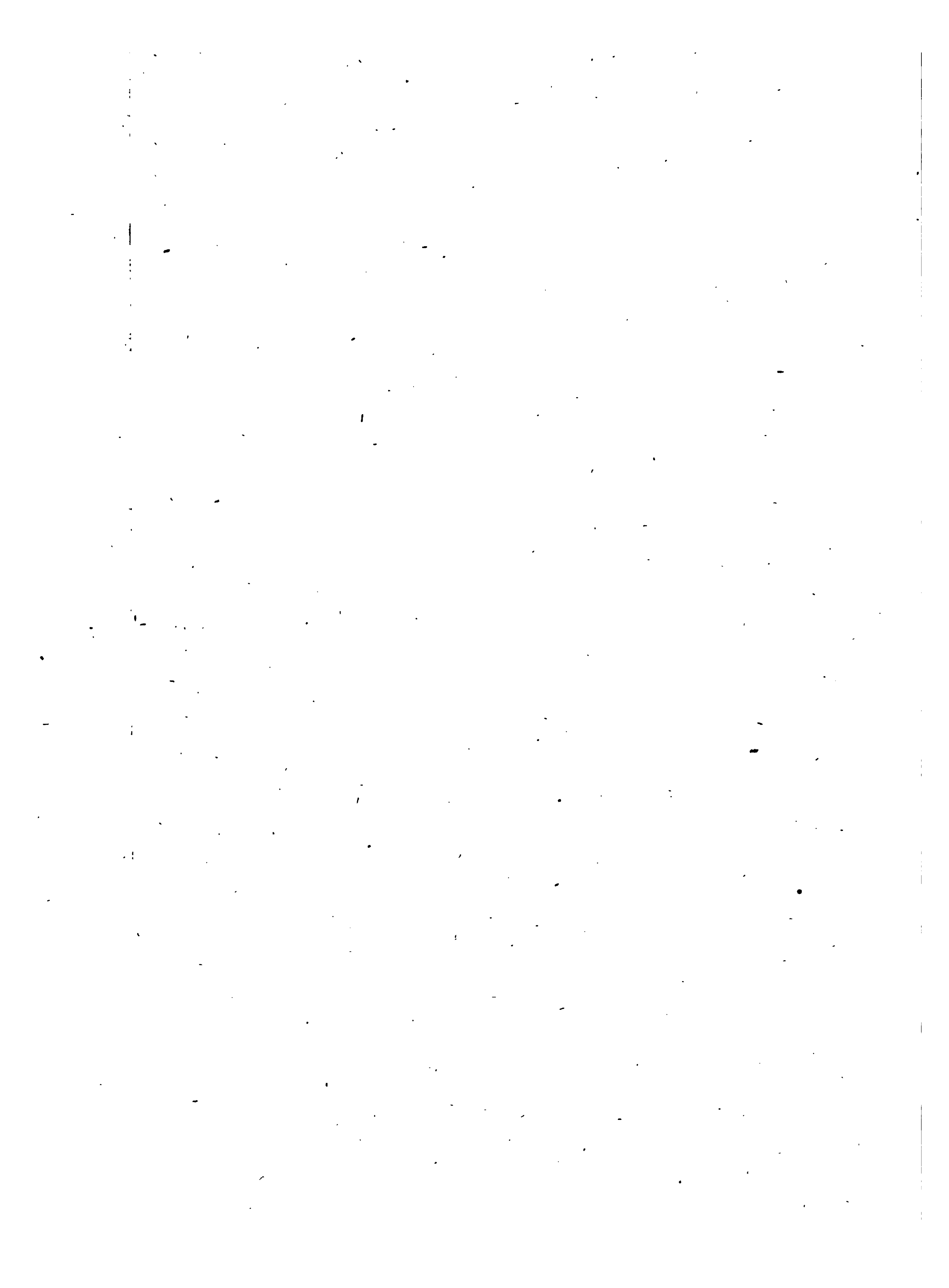


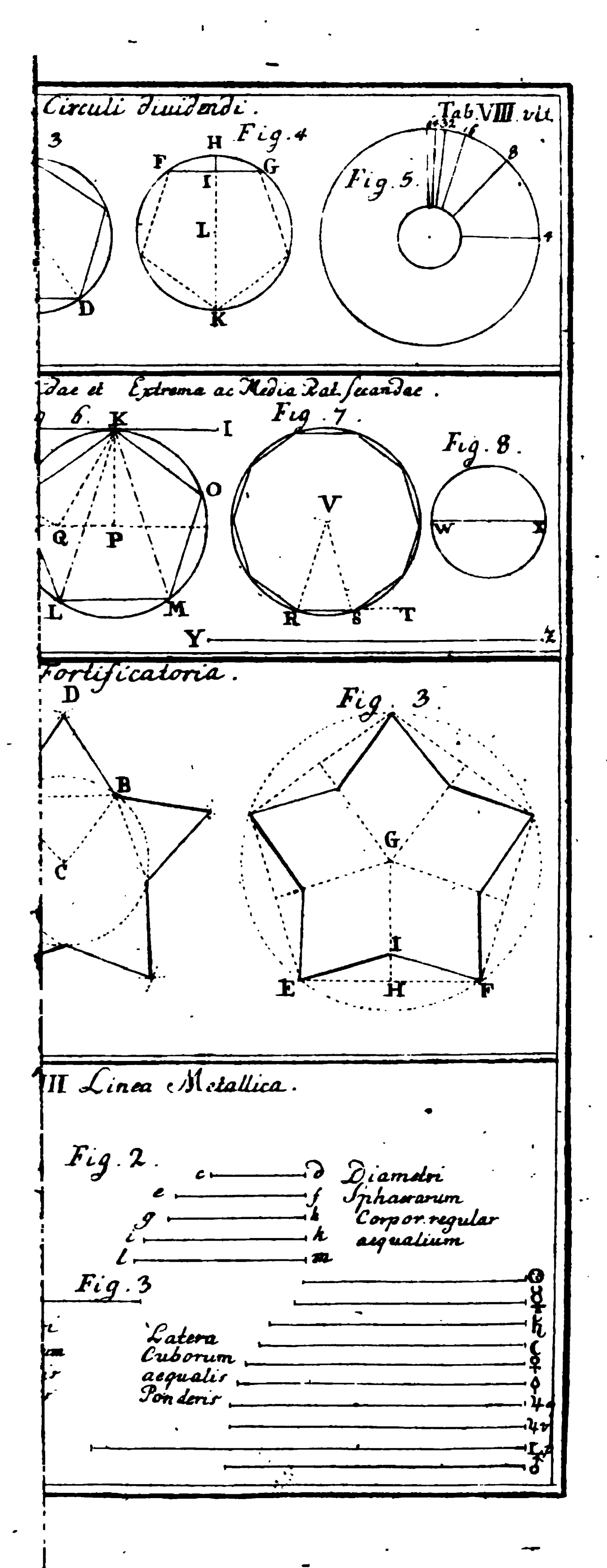
Sphaerae inscribendorum. Tab VI.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
ngentium.
Fig. 6
Fig. 8
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 15
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19





Tab. VII
Fig 24
Fig 28
Fig 29
Fig 30
Linea
Chordarum
Fig 5
Fig 4
Fig 9
Fig 10
Fig 14
Fig 15
Fig 16
Fig 17
Fig 28
Fig 22
Fig 21
Fig 30





Circuli diuidendi.
Tab VIII. vii.
Fig. 4
Fig. 5.
dae et Extrema ac Media Rat. secandae.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fortificatoria.
Fig. 3
II Linea Metallica.
Fig. 2.
Diametri
Sphaerarum
Corpor. regular
aequalium
Fig. 3
Latera
Cuborum
aequalis
Ponderis

